This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

math 2379.00.5

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

FRANCIS B. HAYES

(Class of 1839)

This fund is $10,000 and its income is to be used
"For the purchase of books for the Library"
Mr. Hayes died in 1884

Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Form ungerader Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Facultät

der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Sophus Marxsen
aus Altona.

Göttingen 1900.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Inaug. 2379.00.5

Hayes fund.

Referent: Herr Prof. Dr. Hilbert.

Tag der mündlichen Prüfung: 5. März 1900.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich an eine Abhandlung von Herrn Prof. Hilbert: „Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete“ [1]) an. In dieser Arbeit hat Prof. Hilbert eine Methode angegeben, mittels welcher es möglich war, für eine Form gerader Ordnung ein System irrationaler Invarianten und Covarianten anzugeben, dessen Studium nicht nur an sich von hohem invariantentheoretischen Interesse ist, sondern das sich auch als ein fruchtbares Hülfsmittel für die Behandlung gewisser auf die Grundform und deren rationale Covarianten bezüglicher Fragen, wie Darstellung dieser Gebilde, mögliche Ausartungen der Grundform u. s. w., erweist. Meine Absicht ist es nun, zu zeigen, dass man auch für eine Form ungerader Ordnung ein solches System von irrationalen Invarianten und Covarianten aufstellen kann, das eine ähnliche Bedeutung besitzt, wie das der Hilbert'schen Abhandlung für eine Form gerader Ordnung. Wir gelangen hierzu, indem wir von einem gewissen allgemeinen Probleme ausgehen, das auch den Ausgangspunkt jener Abhandlung bildet und dessen Specialisation einerseits zu den Untersuchungen von Herrn Prof. Hilbert, andrerseits zu den Betrachtungen dieser Arbeit führt. Dieses Problem können wir folgendermassen formulieren.

Es sei ein System von binären Grundformen vorgelegt: f_1, f_2, f_3, ...; es sollen die invarianten Beziehungen untersucht werden, die dieses Formensystem zu der Gesamtheit aller binären Formen von einer beliebigen Ordnung besitzt. Wir wählen zu dem Zweck $\varkappa$ Formen aus jener Reihe f_1, f_2, ... aus, wobei auch eine und dieselbe Form öfter vorkommen kann, und setzen sie zu einer zu-

1) Math. Ann. 28, pag. 381 ff.

nächst völlig willkürlichen Form φ in Beziehung. Jene $\varkappa$ Formen seien $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots, f_{q_\varkappa}$. Wir ordnen ihnen gewisse Ueberschiebungszahlen zu:

$$i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$$

und bilden nun der Reihe nach folgende Ueberschiebungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} (f_{q_1}, \varphi)_{i_1} &= \varphi_1 \\ (f_{q_2}, \varphi_1)_{i_2} &= \varphi_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (f_{q_\varkappa}, \varphi_{\varkappa-1})_{i_\varkappa} &= \varphi_\varkappa. \end{aligned}$$

Die Ordnungen der Formen $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots, f_{q_\varkappa}$ seien beziehungsweise $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa$, die der Formen $\varphi; \varphi_1, \ldots, \varphi_\varkappa$ ebenso $\nu; \nu_1, \ldots \nu_\varkappa$. Dann bestehen zwischen den Ordnungszahlen der Formen und den Ueberschiebungszahlen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} n_1 - 2i_1 &= \nu_1 - \nu \\ n_2 - 2i_2 &= \nu_2 - \nu_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n_\varkappa - 2i_\varkappa &= \nu_\varkappa - \nu_{\varkappa-1}. \end{aligned}$$

Wir verlangen jetzt, dass die Ordnung der letzten abgeleiteten Form $\varphi_\varkappa$ mit der der Ausgangsform φ übereinstimmt; hierfür haben wir offenbar folgende notwendige und hinreichende Bedingung:

$$(2) \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_\varkappa = 2(i_1 + i_2 + \cdots + i_\varkappa),$$

die von der Ordnungszahl ν von φ unabhängig ist. Wenn die Ueberschiebungszahlen i dieser Relation gemäss gewählt sind, dann und nur dann gelangt man von der Form φ aus in der angegebenen Weise zu einer Form $\varphi_\varkappa$ von derselben Ordnung wie φ.

Im Besonderen handelt es sich nunmehr um diejenigen Formen φ, die sich nach Anwendung jener Operationen bis auf einen constanten Faktor λ selbst reproducieren, für welche also die Beziehung gilt:

$$(3) \qquad \varphi_\varkappa = \lambda\varphi.$$

Es zeigt sich — und wir werden diese Bemerkung später näher

begründen —, dass, falls die Formen $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots, f_{q_\varkappa}$ sämtlich die allgemeinsten ihrer Art und von einander verschieden sind, es im Ganzen $\nu+1$ solcher Formen φ giebt, die der Relation (3) genügen. Diese erweisen sich dabei als von einander linear unabhängig. Da aber jede Form einer gewissen Ordnung ν sich durch $\nu+1$ linear unabhängige Formen derselben Ordnung linear darstellen lässt, so erkennen wir, dass wir nach der näheren Untersuchung der sich selbst reproduzierenden Formen φ auch das allgemeine Problem vollständig beherrschen. Und auch in dem Falle, dass die Formen f nicht allgemein oder dass sie teilweise oder sämtlich einander gleich sind, kann man ein System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen νter Ordnung angeben, die das Gleiche leisten wie die Formen φ des allgemeinen Falles. In jedem Falle genügt zunächst die Untersuchung der sich selbst reproducierenden Formen φ. —

Das Problem, das wir hiermit eingeführt haben, ist in der angegebenen Allgemeinheit sehr schwer zu behandeln. Es erweist sich darum zunächst nötig, es zu specialisieren. Den Fall $\varkappa = 1$ hat Herr Prof. Hilbert in der oben angeführten Abhandlung ausführlich untersucht und damit auch schon die wichtigsten Gesichtspunkte für die Untersuchung des allgemeinen Problems gewonnen. Nach (2) ist hier $n_1 = 2i_1$, d. h. die zu Grunde gelegte Form muss notwendig als von gerader Ordnung angenommen werden; die Formen ungerader Ordnung sind damit zunächst ausgeschlossen. Hieran knüpfe ich an, indem ich die Behandlung einer Form ungerader Ordnung nach den obigen Gesichtspunkten zu meiner ausdrücklichen Aufgabe mache. Ich gelange dazu durch Behandlung des Falles $\varkappa = 2$. Doch ist die allgemeine Behandlung des Falles $\varkappa = 2$ für uns nicht nötig, vielmehr können wir die beiden Formen $f_{q_1} = f$, $f_{q_2} = g$, die hierbei zu Grunde gelegt werden, mit einander identisch annehmen. Andrerseits ist es von Interesse, den allgemeinen Fall $\varkappa = 2$ (bei verschiedenen oder identischen f, g) etwas zu verfolgen. Wir werden dieses um so lieber thun, als sich die Theoreme, die wir hierbei gewinnen, fast ebenso leicht für allgemeine f, g ableiten lassen als für $g = f$. Sei jetzt n die Ordnung von f, m die von g, so handelt es sich um die Untersuchung derjenigen Formen φ, welche der Relation

$$\{g, (f, \varphi)_p\}_q = \lambda\varphi \tag{4}$$

genügen, wo $p = i_1$, $q = i_2$ die Ueberschiebungszahlen sind, für welche die Beziehung:

(5) $$n+m = 2(p+q)$$

gilt. Obenein muss

(6) $$\nu \geqq p \quad \text{bzw.} \quad \nu \geqq p - \frac{n-m}{2}$$

sein, damit überhaupt die Bildung der Ueberschiebungen möglich ist. Aus (5) erkennen wir, dass die Ordnungen n, m der Grundformen entweder beide gerade oder beide ungerade sein müssen; für uns kommt im Wesentlichen nur der letztere Fall in Betracht.

Nachdem wir dieses etwas verfolgt haben, werden wir weiterhin zunächst in der Weise specialisieren, dass wir die beiden Grundformen als von gleicher Ordnung, $n = m$, annehmen. Dadurch gehen die Beziehungen (5), (6) bzw. über in

(7) $$p+q = n$$

(8) $$\nu \geqq p.$$

Dabei kann n als ungerade angesehen werden.

Endlich setzen wir dann $g = f$ als eine Form ungerader Ordnung voraus und kommen dadurch zu der eigentlichen Behandlung der oben gestellten Aufgabe. Allerdings tritt dadurch eine neue Komplikation ein. Während nämlich Ausnahmefälle bei verschiedenen g, f nicht eintreten können, so lange die Coefficienten dieser Formen als allgemein betrachtet werden, zeigt es sich, dass für $g = f$ solche auch schon bei allgemein gehaltenen Coefficienten von f eintreten können. Darin liegt auch ein wesentlicher Unterschied, den diese Behandlung der Formen ungerader Ordnung gegenüber der der Formen gerader Ordnung besitzt. Uebrigens fällt die nähere Untersuchung dieser Ausnahmefälle in die allgemeine Untersuchung der Ausnahmefälle überhaupt, auf die wir, weil sie von ganz besonderem Interesse und von Wichtigkeit für die Betrachtung spezieller Grundformen ist, später des Näheren eingehen müssen.

§ 1.

Die determinierende Gleichung und ihre Wurzeln.

Die beiden Formen f und g, die wir zu Grunde legen, mögen folgendermassen heissen:

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

$$g = b_0 x_1^m + \binom{m}{1} b_1 x_1^{m-1} x_2 + \cdots + b_m x_2^m;$$

andrerseits laute die Form φ:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_0 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_2^\nu.$$

Dann ist bekanntlich

$$\varphi_1 = (f, \varphi)_p = (a_0 \alpha_p - \binom{p}{1} a_1 \alpha_{p-1} + \cdots + (-1)^p a_p \alpha_0) x_1^{n+\nu-2p} + \cdots$$

und daher, wenn wir allgemein unter L eine Form verstehen, die in jeder Argumentenreihe linear ist:

$$(g, \varphi_1)_q = \{b_0 L^{(1)}(a; \alpha) - \binom{q}{1} b_1 L^{(2)}(a; \alpha) + - \cdots\} x_1^\nu + \cdots$$

$$= L_0(a; b; \alpha) x_1^\nu + \binom{\nu}{1} L_1(a; b; \alpha) x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + L_\nu(a; b; \alpha) x_2^\nu.$$

Diese Form soll unsrer Forderung gemäss übereinstimmen mit $\lambda\varphi$, es soll also sein

$$(g, \varphi_1)_q = \lambda\alpha_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \lambda\alpha_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \lambda\alpha_\nu x_2^\nu.$$

Es müssen somit die folgenden $\nu+1$ Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} L_0(a; b; \alpha) &= \lambda\alpha_0 \\ L_1(a; b; \alpha) &= \lambda\alpha_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ L_\nu(a; b; \alpha) &= \lambda\alpha_\nu. \end{aligned} \tag{9}$$

Fassen wir diese Gleichungen als $\nu+1$ Bestimmungsgleichungen für die $\nu+1$ inhomogenen Unbekannten

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \cdots, \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}, \lambda$$

auf, so ergiebt sich der Satz:

Im Allgemeinen existiert für ein bestimmtes $\nu \geqq p$ bzw. $\nu \geqq p - \frac{n-m}{2}$ auch ein bestimmtes System von Formen φ, welche den Grundformen f, g im Sinne der Gleichung (4) zugehören.

Die $\nu+1$ Bedingungsgleichungen sind homogen in $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$; wir können daher diese Grössen eliminieren und erhalten so die Bestimmungsgleichung für λ, welche heissen möge:

$$\Delta(a, b; \lambda) = 0 \tag{10}$$

oder, wenn ein Missverständnis ausgeschlossen ist, $\Delta(\lambda) = 0$. $\Delta(\lambda)$ stellt sich als eine $(\nu+1)$-reihige Determinante dar, deren einzelne Elemente in jeder der Coefficientenreihen a, b homogen linear sind, abgesehen von Termen $c\lambda$, unter c reine Zahlencoeffizienten verstanden. Bezeichnen also $K(a, b)$ Formen, die in den a für sich und in den b für sich homogen und linear sind, so können wir unsre Determinante in der Gestalt schreiben:

$$(11)\quad \Delta(a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} K_{00}(a,b), & K_{01}(a,b), & \ldots, & K_{0,\nu-1}(a,b), & K_{0\nu}(a,b)-\lambda \\ K_{10}(a,b), & K_{11}(a,b), & \ldots, & K_{1,\nu-1}(a,b)+\binom{\nu}{1}\lambda, & K_{1\nu}(a,b) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ K_{\nu 0}(a,b)-(-1)^{\nu}\lambda, & K_{\nu 1}(a,b), & \ldots, & K_{\nu,\nu-1}(a,b), & K_{\nu\nu}(a,b) \end{vmatrix}.$$

Hierin ist der Coefficient von $\lambda^{\nu+1}$ immer von 0 verschieden; es ist daher unmöglich, dass diese Determinante für jeden Wert von λ verschwindet.

Unsere Determinante zeichnet sich nun durch gewisse charakteristische Eigenschaften aus, die wir zunächst abzuleiten haben. Die erste dieser Eigenschaften drückt sich in dem Satze aus:

Die Determinante $\Delta(a, b; \lambda)$ besitzt gegenüber den linearen Transformationen der Grundformen f, g, vorausgesetzt, dass beide derselben linearen Transformation unterworfen werden, einen invarianten Charakter, d. h. entwickelt man sie nach Potenzen von λ:

$$\Delta(a, b; \lambda) = J_0\lambda^{\nu+1} + J_1\lambda^{\nu} + J_2\lambda^{\nu-1} + \cdots + J_{\nu+1},$$

so sind die Coeffizienten $J_0, J_1, J_2, \ldots, J_{\nu+1}$ sämtlich simultane Invarianten der Grundformen f, g. Die Grade dieser Invarianten sind bzw. $0, 1, 2, \ldots, \nu+1$ in jeder Coeffizientenreihe a, b; ihre Gewichte sind bzw. $0, p+q, 2(p+q), \ldots, (\nu+1)(p+q)$.

Diesen Satz beweisen wir in folgender Weise. Durch die lineare Transformation

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2'$$
$$x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'$$

mit der Transformationsdeterminante

$$\varrho = \alpha\delta - \beta\gamma$$

mögen f, g, φ beziehungsweise übergehen in f', g', φ'. Da $\varphi_1 = (f, \varphi)_p$ eine simultane Covariante der Formen f, φ ist, so hat man

$$(f', \varphi')_p = \varrho^p (f, \varphi)_p$$

oder

$$\varphi_1' = \varrho^p \varphi_1.$$

Da aber Covarianten von Covarianten wieder Covarianten sind, so hat man weiter:

$$(g', \varphi_1')_q = \varrho^{p+q} (g, \varphi_1)_q.$$

Demzufolge ist

$$\begin{aligned}(g, \varphi_1)_q - \lambda\varphi &= \varrho^{-(p+q)} (g', \varphi_1')_q - \lambda\varphi' \\ &= \varrho^{-(p+q)} ((g', \varphi_1')_q - \varrho^{p+q} \lambda\varphi').\end{aligned}$$

Hieraus können wir Folgendes schliessen. Unsre beliebig gewählte Transformation ordnet den Formen f, g, φ mit der Eigenschaft (4) ein andres Formentripel f', g', φ' zu, welches in analoger Weise die Gleichung

$$\{g', (f', \varphi')_p\}_q = \lambda' \varphi'$$

befriedigt, wo $\lambda' = \varrho^{p+q} \lambda$ gesetzt ist. Ist also λ eine dem Formenpaare f, g in der angedeuteten Weise zugeordnete Constante, so ist λ' in gleicher Weise eine solche für das Formenpaar f', g'. Aber eine solche Zuordnung findet nach den obigen Ausführungen dann und nur dann statt, wenn $\Delta(\lambda) = 0$ ist. Da aber, wenn $\Delta(\lambda) = 0$ ist, die Zugehörigkeit von λ' zu f', g' in dem angegebenen Sinne statthaben muss, so folgt, dass das Verschwinden von $\Delta(\lambda)$ notwendig das Verschwinden von $\Delta'(\lambda')$ zur Folge haben muss, so dass wir die Beziehung ansetzen können:

$$\Delta'(\lambda') = C\Delta(\lambda).$$

Hierin muss obenein C eine Constante sein, die sich leicht durch Vergleichung der Coefficienten von $\lambda^{\nu+1}$ ergiebt. Man findet, dass die Relation statt hat:

$$\Delta'(\lambda') = \varrho^{(\nu+1)(p+q)} \Delta(\lambda).$$

Diese Gleichung beweist den invarianten Charakter von $\Delta(\lambda)$. Fügt man wieder $\lambda' = \varrho^{p+q} \lambda$ in diese Gleichung ein, so ergeben sich die Gewichte der Coeffizienten der einzelnen Potenzen von λ; man findet nämlich

$$\begin{aligned} J_0' &= J_0 \\ J_1' &= J_1 \varrho^{p+q} \\ J_2' &= J_2 \varrho^{2(p+q)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ J_{\varkappa+1}' &= J_{\varkappa+1} \varrho^{(\varkappa+1)(p+q)}. \end{aligned}$$

J_0 ist eine numerische von Null verschiedene Zahl. Weiter zeigt nun der Bau der Determinante $\Delta(\lambda)$, dass jeder Coefficient $J_\varkappa$ notwendig in beiden der Reihen $a_0, a_1, \ldots; b_0, b_1, \ldots$ vom selben Grade homogen sein muss. Sei dieser Grad r, so hat man nach der bekannten Relation zwischen Graden und Gewicht einer Invariante:

$$nr + mr = 2\varkappa(p+q) \quad .$$

und hieraus, da $n+m = 2(p+q)$ ist,

$$r = \varkappa.$$

Unser erster Satz ist damit vollständig bewiesen. Es zeigt sich, dass λ eine irrationale Invariante der Grundformen f, g vom Gewichte $p+q$ ist.

Um weitere Eigenschaften der Determinante $\Delta(\lambda)$ herzuleiten, müssen wir auf den Bau der Form $(g, \varphi_1)_q$ etwas näher eingehen. Hierzu benutzen wir die symbolische Darstellung der Formen f, g, φ und ihrer Covarianten. Es sei

$$f = a_x^n, \quad g = b_x^m;$$
$$\varphi = \alpha_x^\nu.$$

Dann ist bekanntlich

$$\varphi_1 = (f, \varphi)_p = (a\alpha)^p a_x^{n-p} \alpha_x^{\nu-p}.$$

Um nun die $q$te Ueberschiebung der Form g über φ_1 ebenfalls symbolisch darzustellen, hat man folgendermassen zu verfahren. Der Klammerfaktor $(a\alpha)^p$ bleibt unverändert stehen. Im Uebrigen haben wir das Produkt $a_x^{n-p} \alpha_x^{\nu-p}$ auf alle möglichen Arten q mal mit b_x^m zu falten, jeden so entstehenden Term mit einem gewissen Zahlencoeffizienten zu versehen und alle diese Glieder zu addieren [1]). Wir erhalten dadurch

$$(g, \varphi_1)_q = \sum_{i=0}^{i=q} J_i a_x^{n-p-q+i} (ab)^{q-i} \alpha_x^{\nu-p-i} (\alpha b)^i (a\alpha)^p b_x^{m-q}$$

---

1) S. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, II. Bd., pag. 39 ff.

oder, wie wir noch übersichtlicher schreiben können:

$$(12) \qquad (g, \varphi_1)_q = (a\alpha)^p b_x^{n-q} a_x^{n-p-q} \alpha_x^{\nu-p-q} \sum_{i=0}^{i=q} J_i (a_x (\alpha b))^i (\alpha_x (ab))^{q-i}.$$

Auf die Kenntnis der Zahlencoeffizienten J_i kommt es im Folgenden nicht an; sie hängen von n, p, q, ν ab. Ist einer der Exponenten der vor dem $\sum$-Zeichen stehenden „Faktoren erster Art" negativ, so treten nicht alle $q+1$ Glieder auf, sondern nur ein Teil von ihnen; auch dadurch wird keine unsrer weiteren Ueberlegungen geändert. Uebrigens hätte man zu der Darstellung (12) auch auf dem Wege gelangen können, dass man φ_1 q Mal nach y_1, y_2 polarisiert und darauf $y_1 = -b_2$, $y_2 = b_1$ gesetzt hätte. Der Ausdruck (12) ist nunmehr weiter zu behandeln.

Hier machen wir jetzt die erste Specialisierung, die wir nach den Bemerkungen der Einleitung vornehmen wollten; wir setzen $m = n$. Wir thun dieses, weil die Behandlung des allgemeineren Falles, dass m nicht notwendig gleich n ist, die Discussion höchst unübersichtlicher analytischer Ausdrücke nötig macht, deren Betrachtung für unsren eigentlichen Zweck ohne Wert ist. Für $m = n$ treten an Stelle von (5), (6) die einfacheren Beziehungen (7), (8); die Formel (12) geht jetzt über in

$$(13) \qquad (g, \varphi_1)_q = (a\alpha)^p b_x^p \alpha_x^{\nu-p} \sum_{i=0}^{i=q} J_i (a_x (\alpha b))^i (\alpha_x (ab))^{q-i}.$$

In diesem Ausdrucke vertauschen wir beziehungsweise folgende Grössen mit einander: α_1 mit $-x_2$, α_2 mit x_1, a_1 mit b_1, a_2 mit b_2. Dadurch gehen über α_x in $-\alpha_x$, a_x in $-(\alpha b)$, b_x in $(a\alpha)$, (ab) in $-(ab)$. Hieraus erkennen wir, dass $(g, \varphi_1)_q$ übergeht in $(-1)^{n+\nu}(g, \varphi_1)_q$.

Um dieses verwerten zu können, müssen wir uns auch die unsymbolische Darstellung von $(g, \varphi_1)_q$ etwas klarer machen. Bedeutet allgemein $\overline{r}$ eine in den a und α bilineare isobare Form vom Gewichte r, so haben wir:

$$\begin{aligned}
(f, \varphi)_p &= \overline{p}\, x_1^{n+\nu-2p} + (\overline{p+1})\, x_1^{n+\nu-2p-1} x_2 + \cdots = \varphi_1 \\
(g, \varphi_1)_q &= \{b_0(\overline{p+q}) + b_1(\overline{p+q-1}) + \cdots + b_q \overline{p}\}\, x_1^{\nu} \\
&\quad + \{b_0(\overline{p+q+1}) + b_1(\overline{p+q}) + \cdots + b_{q+1}\overline{p}\}\, x_1^{\nu-1} x_2 \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \{b_0(\overline{p+q+\nu}) + b_1(\overline{p+q+\nu-1}) + \cdots + b_{q+\nu}\overline{p}\}\, x_2^{\nu}.
\end{aligned}$$

Bedeuten also $k^q_{\varrho,\tau}$ gewisse Zahlencoeffizienten, so können wir schreiben:

$$(g, \varphi_1)_q = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} \{ k^{\sigma}_{\varrho, p-\nu+\varrho} a_{p-\nu+\varrho} b_{q+\sigma} + k^{\sigma}_{\varrho, p-\nu+\varrho+1} a_{p-\nu+\varrho+1} b_{q+\sigma-1} + \cdots + k^{\sigma}_{\varrho, p+q+\sigma-\nu+\varrho} a_{p+q+\sigma-\nu+\varrho} b_0 \} (-1)^{\nu-\varrho} \alpha_{\nu-\varrho} x_1^{\nu-\sigma} x_2^{\sigma}.$$

Führen wir nun die symbolische Bezeichnungsweise ein, so wird hieraus:

$$(g, \varphi_1)_q = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} \{ k^{\sigma}_{\varrho, p-\nu+\varrho} a_1^{n-p+\nu-\varrho} a_2^{p-\nu+\varrho} b_1^{n-q-\sigma} b_2^{q+\sigma} + k^{\sigma}_{\varrho, p-\nu+\varrho+1} a_1^{n-p+\nu-\varrho-1} a_2^{p-\nu+\varrho+1} b_1^{n-q-\sigma+1} b_2^{q+\sigma-1} + \cdots + k^{\sigma}_{\varrho, p+q+\sigma-\nu+\varrho} a_1^{\nu-\sigma-\varrho} a_2^{p+q+\sigma-\nu+\varrho} b_1^{n} \} (-1)^{\nu-\varrho} \alpha_1^{\varrho} \alpha_2^{\nu-\varrho} x_1^{\nu-\sigma} x_2^{\sigma}.$$

Vertauschen wir hierin beziehungsweise α_1 mit $-x_2$, α_2 mit x_1, a_1 mit b_1, a_2 mit b_2, so erhalten wir einen Ausdruck, der nach Obigem $= (-1)^{n+\nu}(g, \varphi_1)_q$ sein muss. Wir haben also, wenn wir gleich noch ϱ und σ mit einander vertauschen, um diesen Ausdruck mit dem vorigen vergleichen zu können:

$$(-1)^{n+\nu}(g, \varphi_1)_q = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\nu} \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\nu} \{ k^{\varrho}_{\sigma, p-\nu+\sigma} a_1^{n-q-\varrho} a_2^{q+\varrho} b_1^{n-p+\nu-\sigma} b_2^{p-\nu+\sigma} + k^{\varrho}_{\sigma, p-\nu+\sigma+1} a_1^{n-q-\varrho+1} a_2^{q+\varrho-1} b_1^{n-p+\nu-\sigma-1} b_2^{p-\nu+\sigma+1} + \cdots + k^{\varrho}_{\sigma, p+q-\nu+\varrho+\sigma} a_1^{n} b_1^{\nu-\varrho-\sigma} b_2^{n+\sigma-\nu+\varrho} \} (-1)^{\nu-\varrho} \alpha_1^{\varrho} \alpha_2^{\nu-\varrho} x_1^{\nu-\sigma} x_2^{\sigma}.$$

Der Vergleich dieser Formel mit der vorigen zeigt, dass für die Coeffizienten k folgende Relation besteht:

$$k^{\sigma}_{\varrho, p-\nu+\varrho+\tau} = (-1)^{n+\nu} k^{\varrho}_{\sigma, q+\sigma-\tau}. \tag{14}$$

Nunmehr kann man die linearen Formen von a und b, $K_{\iota, \varkappa}(a, b)$, die in unsrer Determinante $\Delta(a, b; \lambda)$ vorkommen, wie man leicht erkennt, in folgender Weise schreiben:

$$K_{\iota, \varkappa}(a, b) = \sum_{\pi} k'_{\varkappa, p-\nu+\varkappa+\pi} a_{p-\nu+\varkappa+\pi} b_{q+\iota-\pi}.$$

Andrerseits ist

$$K_{\varkappa, \iota}(b, a) = \sum_{\pi} k^{\varkappa}_{\iota, p-\nu+\iota+\pi'} a_{q+\varkappa-\pi'} b_{p-\nu+\iota+\pi'}$$

oder, wenn man $\pi' = q - p + \nu - \pi$ setzt,

$$K_{\varkappa, \iota}(b, a) = \sum_{\pi} k^{\varkappa}_{\iota, q+\iota-\pi} a_{p-\nu+\varkappa+\pi} b_{q+\iota-\pi} = (-1)^{n+\nu} \sum_{\pi} k'_{\varkappa, p-\nu+\varkappa+\pi} a_{p-\nu+\varkappa+\pi} b_{q+\iota-\pi}.$$

Die zuletzt geschriebene Summe erstreckt sich zwar zunächst nicht über dieselben Werte von π wie die oben für $K_{\iota, \varkappa}(a, b)$ angeschriebene Summe. Es ist aber zu bemerken, dass einem jeden

Terme eines Gliedes der Determinante ein Term des zur Horizontalreihe symmetrischen Gliedes entsprechen muss, in welches es zufolge unsrer Relation, bis auf das Vorzeichen $(-1)^{n+\nu}$, übergeht, wenn man in ihm die a und b vertauscht. Hieraus folgt, dass jene beiden Summen in der That mit einander identisch sein müssen; wir haben damit die Beziehung gefunden:

$$K_{\varkappa,\lambda}(b, a) = (-1)^{n+\nu} K_{\lambda,\varkappa}(a, b). \tag{15}$$

Von hier aus kommen wir nun leicht zu einer neuen wichtigen Eigenschaft der Determinante $\Delta(a, b; \lambda)$. Vertauschen wir nämlich in ihr Horizontal- und Vertikalreihen (s. (11)), so bekommen wir

$$\Delta(a, b; \lambda) = \begin{vmatrix} K_{00}(a, b), & K_{10}(a, b), & \ldots, & K_{\nu-1,0}(a, b), & K_{\nu,0}(a, b) - (-1)^{\nu}\lambda \\ K_{01}(a, b), & K_{11}(a, b), & \ldots, & K_{\nu-1,1}(a, b) - (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{1}\lambda, & K_{\nu,1}(a, b) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{0\nu}(a, b) - \lambda, & K_{1\nu}(a, b), & \ldots, & K_{\nu-1,\nu}(a, b), & K_{\nu,\nu}(a, b) \end{vmatrix}$$

oder zufolge der Relation (15):

$$\Delta(a, b; \lambda) =$$

$$(-1)^{(n+\nu)(\nu+1)} \begin{vmatrix} K_{00}(b, a), & K_{01}(b, a), & \ldots, & K_{0,\nu-1}(b, a), & K_{0\nu}(b, a) - (-1)^{n}\lambda \\ K_{10}(b, a), & K_{11}(b, a), & \ldots, & K_{1,\nu-1}(b, a) + (-1)^{n}\binom{\nu}{1}\lambda, & K_{1\nu}(b, a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\nu 0}(b, a) - (-1)^{n+\nu}\lambda, & K_{\nu 1}(b, a), & \ldots, & K_{\nu,\nu-1}(b, a), & K_{\nu\nu}(b, a) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n+\nu)(\nu+1)} \Delta(b, a; (-1)^{n}\lambda).$$

Die Relation, die wir hiermit gefunden haben,

$$\Delta(a, b; \lambda) = (-1)^{(\nu+1)(n+\nu)} \Delta(b, a; (-1)^{n}\lambda) \tag{16}$$

bildet den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen.

Im Einzelnen haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

1) n gerade, so stets: $\Delta(a, b; \lambda) = \Delta(b, a; \lambda)$
2) n ungerade, ν gerade: $\Delta(a, b; \lambda) = -\Delta(b, a; -\lambda)$
3) n ungerade, ν ungerade: $\Delta(a, b; \lambda) = \Delta(b, a; -\lambda)$.

Wir benutzen diese Relationen in ihrer Allgemeinheit hier zunächst nicht weiter, sondern machen nunmehr die letzte Specialisierung und nehmen die beiden Grundformen f, g mit einander identisch an. Dadurch gehen die simultanen Invarianten von f

und g in Invarianten der einen Grundform f über. Im ersten Falle, dass diese Form von gerader Ordnung ist, erhalten wir dann keine neue Eigenschaft der Determinante $\Delta(\lambda)$, denn unsre Relation lautet hier:

$$\Delta(a, a; \lambda) = \Delta(a, a; \lambda).$$

Wenn aber f eine Form ungerader Ordnung ist — und diesen Fall wollen wir nach den Bemerkungen der Einleitung allein ausführlich betrachten — so bekommen wir in der That eine wesentliche, einfache Eigenschaft der Determinante, und zwar eine andre, je nachdem ν gerade oder ungerade ist. Wir haben somit zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\text{I.} \quad \nu \equiv 1, \bmod (2) : \Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda) \\ &\text{II.} \quad \nu \equiv 0, \bmod (2) : \Delta(\lambda) = -\Delta(-\lambda). \end{aligned}$$

Im ersten Hauptfalle ist also Δ eine gerade, im zweiten eine ungerade Funktion von λ.

Für die Wurzeln $\lambda = \lambda^{(\mu)}$ der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ bedeutet dieses, dass sie im ersten Hauptfalle einander paarweise entgegengesetzt gleich sind; und dass dieses ebenfalls im zweiten Hauptfalle mit ν Wurzeln der Fall ist, während die $(\nu+1)$te Wurzel $= 0$ ist. Dementsprechend wollen wir diese Wurzeln $\lambda^{(\mu)}$ folgendermassen anordnen:

$$(18) \qquad \begin{aligned} &\text{I.} \quad \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)} = -\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(\nu-1)}, \lambda^{(\nu)} = -\lambda^{(\nu-1)} \\ &\text{II.} \quad \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)} = -\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\nu-2)}, \lambda^{(\nu-1)} = -\lambda^{(\nu-2)}, \lambda^{(\nu)} = 0. \end{aligned}$$

Es kann nun vorkommen, dass von den Wurzeln $\lambda^{(\mu)}$ einige einander gleich sind, selbst bei allgemein gehaltenen Coeffizienten der Form f. (Ist $g \neq f$, so können derartige Ausnahmefälle nur eintreten, wenn zwischen den Coeffizienten der Formen f, g gewisse Relationen bestehen). Wir schliessen diese Vorkommnisse zunächst aus und behandeln zuerst den allgemeineren Fall, dass die Wurzeln $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}$ sämtlich von einander verschieden sind. Auf den Fall der Gleichheit einiger Wurzeln kommen wir im § 4 zurück.

§ 2.

Die Bestimmung des Formensystems φ.

Nachdem wir im vorigen § von den Eigenschaften der Determinante $\Delta(\lambda)$ und ihrer Wurzeln $\lambda^{(\mu)}$ gesprochen haben, wenden wir uns zur Bestimmung der Formen φ selbst. Die hierzu nötigen

Betrachtungen führen wir zunächst wieder für den Fall durch, dass beide Formen f, g zwar von derselben Ordnung, aber nicht notwendig mit einander identisch sind; sie werden dadurch nicht schwerer, wohl aber etwas übersichtlicher. Es sei $\lambda^{(\mu)}$ eine Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$; wir wollen die ihr zugehörige Form

$$\varphi^{(\mu)} = \alpha_0^{(\mu)} x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1^{(\mu)} x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \alpha_\nu^{(\mu)} x_2^\nu$$

bestimmen. Für die Coeffizienten $\alpha_0^{(\mu)}$, $\alpha_1^{(\mu)}$, ..., $\alpha_\nu^{(\mu)}$ dieser Form haben wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(-1)^\nu K_{00}\alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} K_{01}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + K_{0\nu}\alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_0^{(\mu)} = 0 \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(-1)^\nu K_{\nu 0}\alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} K_{\nu 1}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + K_{\nu\nu}\alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_\nu^{(\mu)} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Diese $\nu+1$ linearen Gleichungen mit den $\nu+1$ homogenen Unbekannten sind wegen $\Delta(\lambda^{(\mu)}) = 0$ mit einander verträglich; es giebt also im Allgemeinen eine und nur eine Form $\varphi^{(\mu)}$, welche der Wurzel $\lambda^{(\mu)}$ in dem angegebenen Sinne zugehört. Um sie zu finden, fingieren wir eine weitere Unbekannte u und betrachten an Stelle von (19) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &(-1)^\nu K_{00}\alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} K_{01}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + K_{0\nu}\alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_0^{(\mu)} + y_2^\nu u = 0 \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(-1)^\nu K_{\nu 0}\alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^{\nu-1} K_{\nu 1}\alpha_{\nu-1}^{(\mu)} + \cdots + K_{\nu\nu}\alpha_0^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)}\alpha_\nu^{(\mu)} + (-1)^\nu y_1^\nu u = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

dem wir noch die Gleichung

$$(-1)^\nu \alpha_\nu^{(\mu)} x_2^\nu + (-1)^\nu \binom{\nu}{1} \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} x_1 x_2^{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu \alpha_0^{(\mu)} x_1^\nu - (-1)^\nu \varphi^{(\mu)} = 0 \tag{21}$$

hinzufügen. Damit haben wir $\nu+2$ lineare Gleichungen mit den $\nu+3$ homogenen Unbekannten $\alpha_\nu^{(\mu)}$, $\alpha_{\nu-1}^{(\mu)}$, ..., $\alpha_0^{(\mu)}$, u, $\varphi^{(\mu)}$ erhalten, deren Bestimmung nach bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Gleichungen erfolgt. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} &\alpha_\nu^{(\mu)} : \alpha_{\nu-1}^{(\mu)} : \ldots : \alpha_0^{(\mu)} : u : \varphi^{(\mu)} \\ &= \Delta_\nu^{(\mu)} : \Delta_{\nu-1}^{(\mu)} : \ldots \Delta_0^{(\mu)} : \Delta(\lambda^{(\mu)}) : \Delta(x, y; \lambda^{(\mu)}), \end{aligned} \tag{22}$$

worin $\Delta_\nu^{(\mu)}$, $\Delta_{\nu-1}^{(\mu)}$, ... die den Unbekannten $\alpha_\nu^{(\mu)}$, $\alpha_{\nu-1}^{(\mu)}$, ... zugehörigen leicht angebbaren Determinanten bedeuten und $\Delta(x, y; \lambda^{(\mu)})$, das wir ausführlicher auch $\Delta(a, b; x, y; \lambda^{(\mu)})$ schreiben wollen, den Wert hat:

(23) $$\Delta(a, b; x, y; \lambda^{(\omega)}) =$$

$$\begin{vmatrix} K_{00}(a,b), & K_{01}(a,b), & \ldots, & K_{0,\nu-1}(a,b), & K_{0\nu}(a,b)-\lambda^{(\omega)}, & y_2^\nu \\ K_{10}(a,b), & K_{11}(a,b), & \ldots, & K_{1,\nu-1}(a,b)+\binom{\nu}{1}\lambda^{(\omega)}, & K_{1\nu}(a,b), & -\binom{\nu}{1}y_1 y_2^{\nu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\nu 0}(a,b)-(-1)^\nu\lambda^{(\omega)}, & K_{\nu 1}(a,b), & \ldots, & K_{\nu,\nu-1}(a,b), & K_{\nu\nu}(a,b), & (-1)^\nu y_1^\nu \\ x_2^\nu, & -\binom{\nu}{1}x_1 x_2^{\nu-1}, & \ldots, & (-1)^\nu\binom{\nu}{1}x_2^{\nu-1}x_2, & (-1)^\nu x_1^\nu, & 0 \end{vmatrix}.$$

Zudem zeigt sich $u = 0$, woraus wir erkennen, dass die gefundenen Lösungen (22) thatsächlich auch Lösungen unsres ursprünglichen Gleichungssystems (19) sind; diese sind somit auch unabhängig von den eingeführten Parametern y_1, y_2.

Die Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ besitzt ähnlich wie die Determinante $\Delta(\lambda)$ gewisse ausgezeichnete Eigenschaften. Durch Schlussfolgerungen, die den für $\Delta(\lambda)$ auf pag. 10 ff. geführten ganz analog sind, beweist man zunächst den invarianten Charakter von $\Delta(x, y; \lambda)$:

Die Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ ist ein invariantes Gebilde der Grundformen f, g vom Gewichte $\nu(n-1)$; d. h. entwickelt man sie nach Potenzen von λ:

$$\Delta(x, y; \lambda) = C_0\lambda^\nu + C_1\lambda^{\nu-1} + \cdots + C_\nu,$$

so sind $C_0, C_1, \ldots, C_\nu$ ganze rationale Covarianten von der Ordnung ν in den x sowohl wie in den y, ferner beziehungsweise von den Graden $0, 1, \ldots, \nu$ sowohl in den a als auch in den b.

Dieser Satz ist an die Voraussetzung gleicher Ordnung von f und g überdies nicht gebunden. Wohl aber gilt dieses von den weiteren Ueberlegungen. Vertauschen wir in der Determinante (23) die a mit den b einerseits und die x mit den y andrerseits, so erhalten wir

$$\Delta(b, a; y, x; \lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} K_{00}(b,a), & K_{01}(b,a), & \ldots, & K_{0,\nu-1}(b,a), & K_{0\nu}(b,a)-\lambda, & x_2^\nu \\ K_{10}(b,a), & K_{11}(b,a), & \ldots, & K_{1,\nu-1}(b,a)+\binom{\nu}{1}\lambda, & K_{1\nu}(b,a), & -\binom{\nu}{1}x_1 x_2^{\nu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\nu 0}(b,a)-(-1)^\nu\lambda, & K_{\nu 1}(b,a), & \ldots, & K_{\nu,\nu-1}(b,a), & K_{\nu\nu}(b,a), & (-1)^\nu x_1^\nu \\ y_2^\nu, & -\binom{\nu}{1}y_1 y_2^{\nu-1}, & \ldots, & (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{1}y_1^{\nu-1}y_2, & (-1)^\nu y_1^\nu, & 0 \end{vmatrix}$$

oder zufolge der Relation (15) und nach Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen

$$\Delta(b, a; y, x; \lambda) = (-1)^{\nu(n+\nu)} \times$$

$$\begin{vmatrix} K_{00}(a,b), & K_{01}(a,b), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & K_{0\nu}(a,b)-(-1)^n\lambda, & y_2^\nu \\ K_{10}(a,b), & K_{11}(a,b), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & K_{1\nu}(a,b), & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{\nu-1,0}(a,b), & K_{\nu-1,1}(a,b)+(-1)^{n+\nu}\binom{\nu}{1}\lambda, & \ldots, & K_{\nu-1,\nu}(a,b), & (-1)^{\nu-1}\binom{\nu}{1} y_1^{\nu-1} y_2 \\ K_{\nu 0}(a,b)-(-1)^{n+\nu}\lambda, & K_{\nu 1}(a,b), & \ldots, & K_{\nu\nu}(a,b), & (-1)^\nu y_1^\nu \\ x_2^\nu, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2^{\nu-1}, & \ldots, & (-1)^\nu x_1^\nu, & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ergiebt sich somit die Relation:

$$(24) \qquad \Delta(b, a; y, x; \lambda) = (-1)^{\nu(n+\nu)} \Delta(a, b; x, y; (-1)^n \lambda).$$

Im Einzelnen bekommen wir in den vier möglichen Fällen, von denen für uns nur die beiden letzten Bedeutung haben, folgende Beziehung:

1) $n \equiv 0, (2); \quad \nu \equiv 0, (2)$
$\Delta(b, a; y, x; \lambda) = \Delta(a, b; x, y; \lambda)$
2) $n \equiv 0, (2), \quad \nu \equiv 1, (2)$
$\Delta(b, a; y, x; \lambda) = -\Delta(a, b; x, y; \lambda)$
I. $n \equiv 1, (2); \quad \nu \equiv 1, (2)$
$\Delta(b, a; y, x; \lambda) = \Delta(a, b; x, y; -\lambda)$
II. $n \equiv 1, (2); \quad \nu \equiv 0, (2)$
$\Delta(b, a; y, x; \lambda) = \Delta(a, b; x, y; -\lambda).$

Die Beziehung ist also für unsre beiden Hauptfälle die gleiche.

Um unter Zugrundelegung dieser Relationen die Form $\varphi^{(\mu)}$ wirklich zu bestimmen, beachten wir zunächst, dass nach (22) $\Delta(a, b; x, y; \lambda)$ mit $\varphi^{(\mu)}(x)$ proportional ist. Wir schliessen daraus, dass wir den Ansatz machen können:

$$(25) \qquad \Delta(a, b; x, y; \lambda) = \varphi^{(\mu)}(x) . \psi^{(\mu)}(y),$$

wo $\psi^{(\mu)}(y)$ eine gewisse noch unbekannte Funktion von y_1, y_2; a, b ist.

Die weitere Bestimmung der Form $\varphi^{(\mu)}$ führen wir nur für den Fall $g = f$ (und zwar n ungerade) durch; wir können dann die Gleichung (24) einfacher folgendermassen schreiben:

$$\Delta(y, x; \lambda) = \Delta(x, y; -\lambda);$$

oder da in beiden Hauptfällen $\lambda^{(\mu+1)} = -\lambda^{(\mu)}$ ist, unter μ eine gerade Zahl verstanden:

$$\Delta(y, x; \lambda^{(\mu)}) = \Delta(x, y; \lambda^{(\mu+1)}).$$

Im zweiten Hauptfalle ist dabei der Fall $\mu = \nu$ besonders zu betrachten; hierfür ist $\lambda^{(\nu)} = 0$, also

$$\Delta(y, x; 0) = \Delta(x, y; 0).$$

Schliessen wir ihn für einen Augenblick aus, so ist nach (25)

$$\begin{aligned} \Delta(x, y; \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\psi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, y; \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\psi^{(\mu+1)}(y), \end{aligned}$$

also folgt

$$\varphi^{(\mu)}(y)\psi^{(\mu)}(x) = \varphi^{(\mu+1)}(x)\psi^{(\mu+1)}(y)$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \psi^{(\mu)} &= \varphi^{(\mu+1)} \\ \psi^{(\mu+1)} &= \varphi^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Wir gelangen somit zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta(x, y; \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \Delta(x, y; \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\varphi^{(\mu)}(y). \end{aligned}$$

In dem noch unerledigten Falle $\mu = \nu$ (für II) ist nach (25):

$$\Delta(x, y; 0) = \varphi^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(y),$$

also folgt

$$\varphi^{(\nu)}(y)\psi^{(\nu)}(x) = \varphi^{(\nu)}(x)\psi^{(\nu)}(y),$$

mithin

$$\psi^{(\nu)} = \varphi^{(\nu)}$$

und hieraus:

$$\Delta(x, y; 0) = \varphi^{(\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(y).$$

Die Formen ψ haben sich damit in jedem Falle als übereinstimmend mit den Formen φ erwiesen.

Führen wir beide Hauptfälle getrennt auf, so haben wir demnach die beiden folgenden Gruppen von Formeln:

Hauptfall I:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(x, y; \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\varphi^{(\mu+1)}(y) \\ \Delta(x, y; \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\varphi^{(\mu)}(y) \\ \Delta(x, x; \lambda^{(\mu)}) &= \Delta(x, x; \lambda^{(\mu+1)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\varphi^{(\mu+1)}(x) \end{aligned}\right\} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-1. \tag{26}$$

Hauptfall II:

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta(x, y; \lambda^{(\mu)}) &= \varphi^{(\mu)}(x)\varphi^{(\mu+1)}(y)\\
\Delta(x, y; \lambda^{(\mu+1)}) &= \varphi^{(\mu+1)}(x)\varphi^{(\mu)}(y)\\
\Delta(x, x; \lambda^{(\mu)}) &= \Delta(x, x; \lambda^{(\mu+1)}) = \varphi^{(\mu)}(x)\varphi^{(\mu+1)}(x)
\end{aligned}\right\} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-2. \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(x, y; 0) &= \varphi^{(\nu)}(x)\varphi^{(\nu)}(y)\\
\Delta(x, x; 0) &= [\varphi^{(\nu)}(x)]^2.
\end{aligned}
$$

Wir bemerken noch, daß wir bei den Betrachtungen dieses § von der Voraussetzung lauter verschiedener Wurzeln $\lambda^{(\mu)}$ keinen Gebrauch gemacht haben. Dagegen muss notwendig angenommen werden, dass die Determinante $\Delta(x, y; \lambda^{(\mu)})$ nicht identisch verschwindet; andrenfalls ist die Form $\varphi^{(\mu)}(x)$ nicht eindeutig bestimmt. Wir kommen hierauf in § 4 zurück.

§ 3.

Charakteristische Eigenschaften des Formensystems φ.

Die am Schlusse des vorigen § abgeleiteten Formeln (26), (27) ermöglichen in beiden Hauptfällen die Bestimmung des Formensystems φ. Zur Kenntnis dieser Formen $\varphi^{(\mu)}$ ist nötig die Kenntnis gewisser rationaler Covarianten und der irrationalen Invarianten $\lambda^{(\mu)}$. Die Form $\varphi^{(\mu)}(x)$ erscheint somit als eine irrationale Covariante der Grundform f. Dem Systeme dieser irrationalen Covarianten $\varphi^{(\mu)}(x)$ kommen nun gewisse charakteristische Eigenschaften zu, die zu besprechen die Aufgabe dieses Paragraphen sein soll. Die nähere Untersuchung dieser Eigenschaften führt gleichzeitig zu einer interessanten Darstellung gewisser rationaler Covarianten von f durch die Formen φ.

Die $\nu+1$ Formen $\varphi^{(\mu)}$ sind von einander linear unabhängig.

Diesen Satz beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, es bestände zwischen ihnen eine lineare Relation:

$$c^{(0)}\varphi^{(0)} + c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} = 0,$$

wo die $c^{(\mu)}$ Constante bedeuten. Nach der Definition der $\varphi^{(\mu)}$ ist

$$\{f, (f, \varphi^{(\mu)})_p\}_q = \lambda^{(\mu)}\varphi^{(\mu)}, \tag{28}$$

also auch

$$c^{(\mu)}\{f, (f, \varphi^{(\mu)})_p\}_q = c^{(\mu)}\lambda^{(\mu)}\varphi^{(\mu)}$$

oder

$$\{f, (f, c^{(\mu)}\varphi^{(\mu)})_p\}_q = c^{(\mu)}\lambda^{(\mu)}\varphi^{(\mu)}.$$

Bilden wir diese letzte Gleichung für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ und summieren sie, so folgt

$$\begin{aligned} & c^{(0)}\lambda^{(0)}\varphi^{(0)} + c^{(1)}\lambda^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} \\ = \; & \{f, (f, c^{(0)}\varphi^{(0)})_p\}_q + \{f, (f, c^{(1)}\varphi^{(1)})_p\}_q + \cdots + \{f, (f, c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})_p\}_q \\ = \; & \{f, (f, c^{(0)}\varphi^{(0)} + c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})_p\}_q. \end{aligned}$$

Bestände also obige lineare Relation, so wäre

$$\lambda^{(0)}c^{(0)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \lambda^{(\nu)}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} = 0.$$

Ebenso multiplizieren wir die Gleichung (28) mit $c^{(\mu)}\lambda^{(\mu)}$ und addieren für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$; wir erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} & \lambda^{(0)2}c^{(0)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)2}c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \lambda^{(\nu)2}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} \\ = \; & \{f, (f, \lambda^{(0)}c^{(0)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \lambda^{(\nu)}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)})_p\}_q \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Fahren wir so fort, so bekommen wir im Ganzen das System folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} c^{(0)}\varphi^{(0)} + c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} &= 0 \\ \lambda^{(0)}c^{(0)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \lambda^{(\nu)}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} &= 0 \\ \lambda^{(0)2}c^{(0)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)2}c^{(1)}\varphi^{(1)} + \cdots + \lambda^{(\nu)2}c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

hängigkeit der sich selbst reproducierenden $\nu+1$ Formen φ im allgemeinsten Falle bewiesen.

Zwischen den Formen $\varphi^{(\mu)}$ besteht weiter eine eigentümliche invariante Beziehung, die wir folgendermassen ableiten. Die Gleichung (28) überschieben wir ν mal über die Form $\varphi^{(\varkappa)}$, so dass wir erhalten:

$$\{[f, (f, \varphi^{(\mu)})_p]_q, \varphi^{(\varkappa)}\}_\nu = \lambda^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu.$$

Nun ist nach (13)

$$\{f, (f, \varphi^{(\mu)})_p\}_q = (a\alpha^{(\mu)})^p b_x^p \alpha_x^{(\mu)\nu-n} \sum_{i=0}^{i=q} J_i (a_x (\alpha^{(\mu)} b))^i (\alpha_x^{(\mu)} (ab))^{q-i},$$

wo nunmehr die a, b gleichwertige Symbole derselben Form f bezeichnen und $\varphi^{(\mu)}(x) = \alpha_x^{(\mu)\nu}$ gesetzt ist. Nach bekannten, schon früher (S. 12) benutzten Regeln über die Bildung von Ueberschiebungen folgt hieraus weiter:

$$\{[f, (f, \varphi^{(\mu)})_p]_q, \varphi^{(\varkappa)}\}_\nu = \tag{29}$$

$$(a\alpha^{(\mu)})^p (b\alpha^{(\varkappa)})^p (\alpha^{(\mu)} \alpha^{(\varkappa)})^{\nu-n} \sum_{i=0}^{i=q} \{J_i ((a\alpha^{(\varkappa)}) (\alpha^{(\mu)} b))^i ((\alpha^{(\mu)} \alpha^{(\varkappa)}) (ab))^{q-i}\}.$$

Es ist daher auch

$$\lambda^{(\mu)} (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu =$$

$$(a\alpha^{(\mu)})^p (b\alpha^{(\varkappa)})^p (\alpha^{(\mu)} \alpha^{(\varkappa)})^{\nu-n} \sum_{i=0}^{i=q} \{J_i ((a\alpha^{(\varkappa)}) \alpha^{(\mu)} b))^i ((\alpha^{(\mu)} \alpha^{(\varkappa)}) (ab))^{q-i}\}.$$

Vertauschen wir hierin μ und $\varkappa$, so folgt

$$\lambda^{(\varkappa)} (\varphi^{(\varkappa)}, \varphi^{(\mu)})_\nu =$$

$$(a\alpha^{(\varkappa)})^p (b\alpha^{(\mu)})^p (\alpha^{(\varkappa)} \alpha^{(\mu)})^{\nu-n} \sum_{i=0}^{i=q} \{J_i ((a\alpha^{(\mu)}) (\alpha^{(\varkappa)} b))^i ((\alpha^{(\varkappa)} \alpha^{(\mu)}) (ab))^{q-i}\}.$$

Hierin können wir die gleichwertigen Symbole a, b mit einander vertauschen und erkennen dann, dass die rechte Seite der letzten Gleichung mit der rechten Seite der vorigen Gleichung bis auf das Vorzeichen übereinstimmt. Wir erhalten somit die folgende Relation

$$(\lambda^{(\mu)} - (-1)^n \lambda^{(\varkappa)}) (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)}) = 0$$

oder, da wir hier nur den Fall eines ungeraden n betrachten:

$$(\lambda^{(\mu)} + \lambda^{(\varkappa)}) (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = 0.$$

Einer der auf der linken Seite dieser Gleichung auftretenden Faktoren muss also $= 0$ sein. Wir schliessen hieraus:

Die Relation

$$(30) \qquad (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu = 0$$

besteht für alle Werte von μ und $\varkappa$, für welche nicht

$$\lambda^{(\mu)} = -\lambda^{(\varkappa)}$$

ist.

Wir können überdies leicht angeben, wann hiernach $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ nicht $= 0$ zu sein braucht; es tritt dieses ein in den Fällen:

$$(31) \qquad \begin{aligned} &\text{Hauptfall I: } \mu, \varkappa = 0, 1; 2, 3; \ldots; \nu-1, \nu \\ &\quad\text{„ II: } \mu, \varkappa = 0, 1; 2, 3; \ldots; \nu-2, \nu-1; \nu, \nu. \end{aligned}$$

In allen andern Fällen wird bei der vorausgesetzten Verschiedenheit aller Wurzeln $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ notwendig $= 0$.

Wir können andrerseits aber auch zeigen, dass für die in (31) angegebenen Wertepaare von μ, $\varkappa$ $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ thatsächlich von Null verschieden sein muss. Dieses geschieht auf folgende Weise. Da die $\nu+1$ Formen $\varphi^{(\mu)}$ von einander linear unabhängig sind, so ist ihre Functionalinvariante

$$\Phi = \begin{vmatrix} \alpha_0^{(0)} & \alpha_1^{(0)} & \ldots & \alpha_\nu^{(0)} \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \ldots & \alpha_\nu^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0^{(\nu)} & \alpha_1^{(\nu)} & \ldots & \alpha_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden. Nun ist[1])

$$\begin{vmatrix} (\varphi^{(0)}, \varphi^{(0)})_\nu, & (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu, & \ldots, & (\varphi^{(0)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \\ (\varphi^{(1)}, \varphi^{(0)})_\nu, & (\varphi^{(1)}, \varphi^{(1)})_\nu, & \ldots, & (\varphi^{(1)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(0)})_\nu, & (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(1)})_\nu, & \ldots, & (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \end{vmatrix} = N\Phi^2,$$

wo N einen gewissen numerischen Faktor bedeutet. Die hier auftretende Determinante ist aber unter Benutzung der Relationen (30) leicht auszuwerten; wir finden

$$(32) \qquad \begin{aligned} &\text{Hauptfall I: } (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu^2 (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\nu^2 \ldots (\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\nu^2 = N\Phi^2 \\ &\quad\text{„ II: } (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu^2 (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\nu^2 \ldots (\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu^2 (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu = N\Phi^2. \end{aligned}$$

Da $\Phi \neq 0$ ist, so gilt dieses auch von jedem der auf der linken Seite dieser Gleichungen stehenden Faktoren; in den Fällen der Tabelle (31) ist also $(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)})_\nu$ in der That von Null verschieden. Damit ist unsre Behauptung erwiesen.

---

1) S. den analogen Schluss der Hilbert'schen Abhandlung, pag. 404.

Wir untersuchen die Eigenschaften des Formensystems φ weiterhin unter Zugrundelegung der Gleichungen (26), (27). Die Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ ist eine Covariante der Grundform f mit den beiden cogredienten Variablenreihen $x_1, x_2; y_1, y_2$. Wir behandeln sie mittels des bekannten Clebsch'schen Operationsprozesses Ω. Dieser ist definiert durch

$$\Omega = \frac{1}{\mu . \nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2}\right),$$

wo μ, ν beziehungsweise die Ordnungen der Form, auf welche die Operation angewandt werden soll, in den x und y sind. Die Anwendung des Ω-Prozesses auf eine Covariante liefert wieder eine Covariante und zwar ist

$$\Omega^\sigma (a_x^\mu b_y^\nu) = (ab)^\sigma a_x^{\mu-\sigma} b_y^{\nu-\sigma}.$$

Berücksichtigen wir nun einerseits die Entwickelung der Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ nach Potenzen von λ, andrerseits die Gleichungen (26), (27), so folgt nach σ-maliger Anwendung der Operation Ω auf diese Gleichungen und hierauf erfolgender Gleichsetzung der beiden Variablenreihen $y_1 = x_1$; $y_2 = x_2$ folgende Gruppe von Relationen:

Hauptfall I.

$$\begin{aligned}
\underset{y=x}{\Omega^\sigma \Delta} &= C_2^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-1} + C_6^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-3} + \cdots + C_{2\nu}^{(2\nu-2\sigma)} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-1 \\ \sigma = 0, 2, \ldots, \nu-1 \end{cases} \\
\underset{y=x}{\Omega^\sigma \Delta} &= C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)} + C_4^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-2} + \cdots + C_{2(\nu-1)}^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-1 \\ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu. \end{cases}
\end{aligned}$$

Hauptfall II.

(33)
$$\begin{aligned}
\underset{y=x}{\Omega^\sigma \Delta} &= C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu} + C_4^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-2} + \cdots + C_{2\nu}^{(2\nu-2\sigma)} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-2 \\ \sigma = 0, 2, \ldots, \nu \end{cases} \\
\underset{y=x}{\Omega^\sigma \Delta} &= C_2^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-1} + C_6^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)\nu-3} + \cdots + C_{2(\nu-1)}^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(\mu)} \\
&= (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\sigma \qquad \begin{cases} \mu = 0, 2, \ldots, \nu-2 \\ \sigma = 1, 3, \ldots, \nu-1 \end{cases} \\
\underset{y=x}{\Omega^\sigma \Delta} &= C_{2\nu}^{(2\nu-2\sigma)} = (\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma \qquad \sigma = 0, 2, \ldots, \nu.
\end{aligned}$$

Um die Entstehung dieser Formeln noch etwas zu erläutern, bemerken wir, dass notwendig $\Omega^\sigma \underset{y=x}{\Delta}(x, y; \lambda^{(u)})$ bei geradem σ eine gerade, bei ungeradem σ eine ungerade Funktion von $\lambda^{(u)}$ sein muss. Es folgt dieses leicht, wenn man die Operation Ω wiederholt auf die rechten Seiten der Gleichungen (26), (27) anwendet. In (33) bedeuten die C sämtlich Covarianten der Grundform f; der obere Index bedeutet überall die Ordnung in den x, der untere den Grad in den Coeffizienten a von f.

Indem wir nunmehr das Gleichungssystem (33) für die verschiedenen dort angegebenen Werte von μ aufstellen, erhalten wir in den einzelnen Fällen ein System von Gleichungen, aus denen wir einige der Covarianten C eliminieren können. Wir haben im Ganzen vier Fälle zu unterscheiden, da jeder der beiden Hauptfälle wieder in zwei Unterfälle zerfällt, je nachdem σ gerade oder ungerade ist.

I. Hauptfall; σ gerade.

Wir haben hier zusammen $\frac{\nu+1}{2}$ Gleichungen (nämlich für $\mu = 0, 2, \ldots, \nu-1$) und können aus ihnen die $\frac{\nu-1}{2}$ Grössen $C_6^{(3\nu-2\sigma)}, C_{10}^{(2\nu-2\sigma)}, \ldots, C_{2\nu}^{(2\nu-2\sigma)}$ eliminieren; wir erhalten dann:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(0)\,\nu-3}, & \lambda^{(0)\,\nu-5}, & \ldots, 1, & (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(0)\,\nu-1} \\ \lambda^{(2)\,\nu-3}, & \lambda^{(2)\,\nu-5}, & \ldots, 1, & (\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(2)\,\nu-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{(\nu-1)\,\nu-3}, & \lambda^{(\nu-1)\,\nu-5}, & \ldots, 1, & (\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(\nu-1)\,\nu-1} \end{vmatrix} = 0,$$

oder indem wir diese Determinante nach der letzten Vertikalreihe entwickeln:

$$\left\{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(0)\,\nu-1}\right\} \prod_{\neq 0}^{i,k} (\lambda^{(i)\,2} - \lambda^{(k)\,2})$$

$$- \left\{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)}\lambda^{(2)\,\nu-1}\right\} \prod_{\neq 2}^{i,k} (\lambda^{(i)\,2} - \lambda^{(k)\,2}) + - \cdots = 0.$$

Hierin bedeutet z. B. $\prod_{\neq 0}^{i,k}$, dass von den möglichen Werten von i, k $(i < k)$ der Wert 0 auszunehmen, dass also das Produkt sich nur über $i, k = 2, 4, \ldots, \nu-1$ erstreckt. Indem man an der letzten Gleichung einige leichtere Umformungen vornimmt, erkennt man, dass man ihr die folgende Gestalt geben kann:

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = C_2^{(2\nu-2\sigma)},$$

worin $\Pi_\varkappa$ das Produkt aller Differenzen von $\lambda^{(\varkappa)}$ mit sämtlichen übrigen Wurzeln λ bedeutet und auf der rechten Seite ein unwesentlicher Faktor $\frac{1}{2}$ unterdrückt ist.

I. Hauptfall; σ ungerade.

Hier haben wir für $\mu = 0, 2, \ldots, \nu-1$ $\frac{\nu+1}{2}$ Gleichungen, aus denen die $\frac{\nu-1}{2}$ Grössen $C_4, C_8, \ldots, C_{2(\nu-1)}$ eliminiert werden können; dieses giebt uns

$$\left\{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(0)\nu}\right\} \lambda^{(2)} \lambda^{(4)} \ldots \lambda^{(\nu-1)} \prod_{\neq 0}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2})$$

$$- \left\{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(2)\nu}\right\} \lambda^{(0)} \lambda^{(4)} \lambda^{(6)} \ldots \lambda^{(\nu-1)} \prod_{\neq 2}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2})$$

$$+ - \cdots = 0.$$

Auch diese Beziehung kann umgeformt werden; wir geben sie in der einfacheren Gestalt weiter unten an.

II. Hauptfall; σ gerade.

Indem wir $\mu = 0, 2, \ldots, \nu$ setzen, bekommen wir $\frac{\nu}{2}+1$ Gleichungen, aus denen wir nach Elimination der $\frac{\nu}{2}$ Grössen C_4, $C_8, \ldots, C_{2\nu}$ die Beziehung erhalten:

$$\left\{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(0)\nu}\right\} \prod_{\neq 0}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2})$$

$$- \left\{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma - C_0^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(2)\nu}\right\} \prod_{\neq 2}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2}) + - \cdots$$

$$\pm (\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma \prod_{\neq \nu}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2}) = 0.$$

II. Hauptfall; σ ungerade.

Hier setzen wir $\mu = 0, 2, \ldots, \nu-2$ und eliminieren aus den bezüglichen $\frac{\nu}{2}$ Gleichungen die $\frac{\nu}{2}-1$ Grössen $C_6, C_{10}, \ldots, C_{2(\nu-1)}$ und bekommen dann:

$$\left\{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(0)\,\nu-1}\right\} \prod_{\neq 0}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2})$$

$$- \left\{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma - C_2^{(2\nu-2\sigma)} \lambda^{(2)\,\nu-1}\right\} \prod_{\neq 2}^{i,k} (\lambda^{(i)2} - \lambda^{(k)2})$$

$$+ - \cdots = 0.$$

Die einfacheren Gestalten dieser vier Gleichungen, die man durch nicht sehr mühevolle Umformungen erhält, stellen wir im Folgenden zusammen:

I. Hauptfall; σ gerade.

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = C_2^{(2\nu-2\sigma)}.$$

I. Hauptfall; σ ungerade.

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = C_0^{(2\nu-2\sigma)}.$$

(34) II. Hauptfall; σ gerade.

$$\frac{2(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{2(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}} + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = C_0^{(2\nu-2\sigma)}.$$

II. Hauptfall; σ ungerade.

$$\frac{\lambda^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{\lambda^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{\lambda^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}} = C_2^{(2\nu-2\sigma)}.$$

Was nunmehr die hier auftretenden Covarianten $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$, $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$ angeht, so ist über sie Folgendes zu bemerken. Covarianten vom Grade 0 giebt es nicht, ausgenommen den Fall der constanten numerischen Zahl; $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$ kann also nur für $\sigma = \nu$ existieren. Covarianten zweiten Grades giebt es dagegen mehrere, es sind dieses die Ueberschiebungen der Form f über sich selbst. Ihre Ordnungen sind, da f eine Form ungerader Ordnung ist, stets $\equiv 2$, mod (4); genau dasselbe gilt von den hier auftretenden Covarianten $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$. Die Ordnung einer Ueberschiebung ist jedoch höchstens $2n$; ist daher $\nu > n$, so müssen notwendig alle Covarianten $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$ für $\sigma < \nu - n$ verschwinden. Dasselbe könnte auch der Fall sein mit den Covarianten, die dieser Ueberlegung zufolge nicht notwendig $= 0$ zu sein brauchen. Indem man jedoch auf die Entstehung der $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$ und $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$ aus der Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ zurückgeht und überall einen passend gewählten Term dieser Covarianten berechnet, erweist sich, dass in allen den

Fällen, in denen die $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$, $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$ nach der soeben angestellten Ueberlegung nicht Null zu sein brauchen, sie in der That auch von Null verschieden sind. Wir bekommen demnach die folgenden wichtigen Beziehungen, wobei wir $\nu > n$ (beziehungsweise $\nu > n+1$) voraussetzen, da dieser Fall als die Fälle $\nu < n$ und $\nu = n$ (bzw. $\nu \leqq n+1$) umfassend angesehen werden darf:

I. Hauptfall:

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_{\nu-1}} = 0$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots, \nu-2.$$

(35) II. Hauptfall:

$$\frac{2(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma}{\Pi_0} + \frac{2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma}{\Pi_2} + \cdots + \frac{2(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma}{\Pi_{\nu-2}} + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma}{\Pi_\nu} = 0$$

$$\sigma = 0, 2, \ldots, \nu-2.$$

I. Hauptfall:

$$\frac{(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\nu}{\Pi_2} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\nu}{\Pi_{\nu-1}} = E.$$

(36) II. Hauptfall:

$$\frac{2(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\nu}{\Pi_0} + \frac{2(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\nu}{\Pi_2} + \cdots + \frac{2(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu}{\Pi_{\nu-2}} + \frac{(\varphi^{(\nu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu}{\Pi_\nu} = E.$$

I. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + l^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma = 0$$

$$\sigma = 0, 2, \ldots, \nu-n-2.$$

(37) II. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + l^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma = 0$$

$$\sigma = 1, 3, \ldots, \nu-n-2.$$

I. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + l^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\nu-1)}, \varphi^{(\nu)})_\sigma = (f, f)_{\sigma+n-\nu}$$

$$\sigma = \nu-n, \nu-n+2, \ldots, \nu-1.$$

(38) II. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})_\sigma + l^{(2)}(\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)})_\sigma + \cdots + l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\nu-2)}, \varphi^{(\nu-1)})_\sigma = (f, f)_{\sigma+n-\nu}$$

$$\sigma = \nu-n, \nu-n+2, \ldots, \nu-1.$$

In den Relationen (36) bedeutet E eine gewisse von Null ver-

schiedene Zahl; in den Relationen (37) und (38) sind die $l^{(\varkappa)}$ den Quotienten $\frac{\lambda^{(\varkappa)}}{\Pi_\varkappa}$ proportionale Grössen.

Ist $\nu = n$ (bzw. $\nu = n+1$), so fallen die Gleichungen (37) fort. Ist $\nu < n$, so erhalten wir überdies in (38) nicht alle Ueberschiebungen, sondern nur einen Teil von ihnen und zwar die von den niedrigsten Ordnungen. Die beiden interessantesten Fälle sind daher gegeben durch $\nu = n$ und $\nu = n+1$; in jedem von ihnen kann man nach dem Vorigen alle Ueberschiebungen der Form f über sich selbst in einfacher Weise durch die irrationalen Invarianten und Covarianten $\lambda^{(\mu)}$, $\varphi^{(\mu)}$ darstellen. Insbesondere gilt dieses auch von dem Quadrate der Grundform f selbst; auch für diese ist danach eine derartige Darstellung gegeben.

Es sei noch bemerkt, dass man, wie $C_0^{(2\nu-2\sigma)}$ oder $C_2^{(2\nu-2\sigma)}$ auch die übrigen Covarianten C darstellen kann. Man gelangt dazu durch Elimination der übrigen $C^{(2\nu-2\sigma)}$ aus den Gleichungen (33). Es lassen sich daher auch gewisse rationale Covarianten 4., 6., 8., ... Grades durch die $\lambda^{(\mu)}$, $\varphi^{(\mu)}$ darstellen. Wir gehen jedoch hierauf nicht näher ein.

Die Formeln (35), (36), (37) zeigen, dass zwischen den quadratischen Covarianten der Formen $\varphi^{(\mu)}$ gewisse von einander unabhängige lineare Identitäten bestehen. Sie lassen aber noch weitergehende Schlüsse zu.

Sind φ, ψ, χ drei Formen ν ter Ordnung, so bestehen zwischen ihren in den Coeffizienten linearen Covarianten gewisse lineare Relationen, von denen für uns die beiden folgenden wichtig sind[1]):

$$(\varphi, \chi)_\nu \cdot \psi + (\varphi, \psi)_\nu \cdot \chi = 2c_0(\varphi, \psi \cdot \chi)_\nu + 2c_2(\varphi, (\psi, \chi)_2)_{\nu-2} + \cdots$$
$$(\varphi, \chi)_\nu \cdot \psi - (\varphi, \psi)_\nu \cdot \chi = 2c_1(\varphi, (\psi, \chi)_1)_{\nu-1} + 2c_3(\varphi, (\psi, \chi)_3)_{\nu-3} + \cdots,$$

wo die c constante Grössen bedeuten. Wir bilden nun nach Aufstellung sämtlicher Gleichungen (35), (36), für $\sigma = 1, 3, \ldots, \nu$ beziehungsweise $\sigma = 0, 2, \ldots, \nu$ bezüglich die $(\nu-\sigma)$te Ueberschiebung einer solchen Gleichung über $\varphi^{(\mu)}$ und multiplicieren mit c_σ. Addieren wir dann die so erhaltenen Gleichungen, so bekommen wir unter Benutzung der soeben angeschriebenen Relationen:

I. Hauptfall:

$$\frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(1)})_\nu \cdot \varphi^{(0)}}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(0)})_\nu \cdot \varphi^{(1)}}{\Pi_1} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-1)}}{\Pi_{\nu-1}} + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu)}}{\Pi_\nu} = Ec_\nu \varphi^{(\mu)}. \tag{39}$$

1) s. Hilbert, l. c. pag. 410.

II. Hauptfall:

$$(39)\quad \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(1)})_\nu \cdot \varphi^{(0)}}{\Pi_0} + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(0)})_\nu \cdot \varphi^{(1)}}{\Pi_1} + \cdots + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-2)}}{\Pi_{\nu-2}} + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-2)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-1)}}{\Pi_{\nu-1}} + \frac{(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu)}}{\Pi_\nu} = E c_\nu \varphi^{(\mu)}.$$

Beachten wir hierbei die Beziehung (30), so folgt

I. Hauptfall:

$$(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\nu = E' \Pi_\mu; \quad \mu = 0, 2, \ldots, \nu-1.$$

(40) II. Hauptfall:

$$(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\mu+1)})_\nu = E' \Pi_\mu; \quad \mu = 0, 2, \ldots, \nu-2.$$
$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(\nu)})_\nu = E' \Pi_\nu.$$

Hierin bedeutet E' eine neue Constante. Die von Null verschiedenen νten Ueberschiebungen der Formen $\varphi^{(\mu)}$ über einander gewinnen hiernach eine sehr einfache Bedeutung; zugleich folgt, dass in beiden Hauptfällen das Quadrat der Functionalinvariante der Formen $\varphi^{(\mu)}$ mit der Discriminante der determinierenden Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ übereinstimmt.

Indem wir mit den Gleichungen (37), (38) dasselbe vornehmen wie mit (35), (36), erhalten wir weiter:

I. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(1)})_\nu \cdot \varphi^{(0)} + l^{(1)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(0)})_\nu \cdot \varphi^{(1)} + \cdots + l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-1)} + l^{(\nu)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu)}$$
$$= \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_0\}_n c_{\nu-n} + \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_2\}_{n-2} c_{\nu-n+2} + \cdots + \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_{n-1}\}_1 c_{\nu-1}.$$

(41) II. Hauptfall:

$$l^{(0)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(0)})_\nu \cdot \varphi^{(0)} + l^{(1)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(0)})_\nu \cdot \varphi^{(1)} + \cdots + l^{(\nu-2)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-1)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-2)} + l^{(\nu-1)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu-2)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu-1)} + l^{(\nu)}(\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\nu)})_\nu \cdot \varphi^{(\nu)}$$
$$= \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_0\}_n c_{\nu-n} + \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_2\}_{n-2} c_{\nu-n+2} + \cdots + \{\varphi^{(\mu)}, (f,f)_{n-1}\}_1 c_{\nu-1}.$$

Diese Gleichungen lassen sich bedeutend einfacher schreiben. Auf der linken Seite bleibt zufolge der Relationen (30) nur ein Term stehen, der zufolge der Beziehungen (40) zudem eine einfache Bedeutung besitzt. Was die rechte Seite der Gleichungen betrifft, so dient zu ihrer Vereinfachung die folgende Bemerkung. Es seien f, g zwei Formen $n$ter Ordnung, h eine solche νter Ordnung. Wir berechnen die Zahl aller linear unabhängigen Cova-

rianten dieser Formen, die in den Coeffizienten von jeder von ihnen linear und zudem vom Gewichte p sind. Diese Anzahl ist, wie man nach den Methoden des Abzählungscalcüls erkennt, gleich $p+1$. Wir nehmen insbesondere $p = n$. Zwischen $n+2$ Covarianten der Formen f, g, h, die vom Grade 1, vom Gewichte n, also der Ordnung ν sind, besteht sonach eine lineare Relation. Solche Covarianten sind nun z. B.:

$$\{h, (f, g)_0\}_n, \quad \{h, (f, g)_1\}_{n-1}, \quad \ldots, \quad \{h, (f, g)_n\}_0; \quad \{g, (f, h)_p\}_q$$

wobei $p+q = n$ ist. Wir schließen also, daß stets die identische Beziehung gelten muß:

$$\{h, (f, g)_0\}_n c_{\nu-n} + \{h, (f, g)_1\}_{n-1} c_{\nu-n+1} + \cdots + \{h, (f, g)_n\}_0 c_\nu = \{g, (f, h)_p\}_q.$$

Indem man im Besonderen $g = f$, $h = \varphi^{(\mu)}$ nimmt und n als ungerade voraussetzt, erhält man:

$$\{\varphi^{(\mu)}, (f, f)_0\}_n c_{\nu-n} + \{\varphi^{(\mu)}(f, f)_2\}_{n-2} c_{\nu-n+2} + \cdots + \{\varphi^{(\mu)}, (f, f)_{n-1}\} c_{\nu-1} = \{f, (f, \varphi^{(\mu)})_p\}_q.$$

Unsere vorher abgeleiteten Gleichungen (41) nehmen somit die Gestalt an:

I. und II. Hauptfall:

$$\{f, (f, \varphi^{(\mu)})_p\}_q = E^\nu \lambda^{(\mu)} \varphi^{(\mu)}; \quad \mu = 0, 1, \ldots, \nu. \tag{42}$$

Wir sind somit wieder zu unsrer Ausgangsgleichung zurückgelangt. Unsre Kette von Folgerungen ist damit geschlossen; wir erkennen, dass unser Formensystem φ sich durch die Gleichungen (30), (35), (36), (37), (38) ebenso gut charakterisieren lässt wie durch die Gleichung (42), durch die es ursprünglich definiert war.

Aber wir können sogar noch mehr sagen. Wir behaupten, dass die Gleichungen (30) mit den Gleichungen (35), (36) vollständig äquivalent sind und daher einander ersetzen können. Denn erstens folgt aus der Existenz der Relationen (30) die der Formeln (35), (36). Seien nämlich

$$\varphi^{(\mu)}(x) = \alpha_0^{(\mu)} x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \alpha_1^{(\mu)} x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + \alpha_\nu^{(\mu)} x_2^\nu$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$ $\nu+1$ Formen νter Ordnung, für welche die Beziehungen (30) gelten, so müssen auch die folgenden Beziehungen bestehen[1]):

1) Vgl. denselben Schluss in der Hilbert'schen Abhandlung, pag. 412.

I. Hauptfall:

$$\frac{\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(0)},\,\varphi^{(1)})_\nu} - \frac{\varphi^{(0)}(y)\,\varphi^{(1)}(x)}{(\varphi^{(0)},\,\varphi^{(1)})_\nu} + - \cdots + \frac{\varphi^{(\nu-1)}(x)\,\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu-1)},\,\varphi^{(\nu)})_\nu}$$
$$- \frac{\varphi^{(\nu-1)}(y)\,\varphi^{(\nu)}(x)}{(\varphi^{(\nu-1)},\,\varphi^{(\nu)})_\nu} = -(x_1 y_2 - y_1 x_2)^\nu.$$

II. Hauptfall:

$$\frac{\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(y)}{(\varphi^{(0)},\,\varphi^{(1)})_\nu} + \frac{\varphi^{(0)}(y)\,\varphi^{(1)}(x)}{(\varphi^{(0)},\,\varphi^{(1)})_\nu} + \cdots + \frac{\varphi^{(\nu-2)}(x)\,\varphi^{(\nu-1)}(y)}{(\varphi^{(\nu-2)},\,\varphi^{(\nu-1)})_\nu}$$
$$+ \frac{\varphi^{(\nu-2)}(y)\,\varphi^{(\nu-1)}(x)}{(\varphi^{(\nu-2)},\,\varphi^{(\nu-1)})_\nu} + \frac{\varphi^{(\nu)}(x)\,\varphi^{(\nu)}(y)}{(\varphi^{(\nu)},\,\varphi^{(\nu)})_\nu} = \pm (x_1 y_2 - y_1 x_2)^\nu.$$

Indem man auf diese Gleichungen die Operation Ω^σ anwendet und alsdann $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ setzt, erhält man die Gleichungen (35), (36) wieder. Aber auch das Umgekehrte gilt. Die Existenz der Relationen (35), (36) zieht nämlich die von (39) nach sich, und da die Formen φ von einander linear unabhängig sind, so müssen in der That die in (30) angegebenen Ueberschiebungen verschwinden.

Die Beziehungen (30) einerseits, (35), (36) andrerseits sind sonach vollkommen gleichwertig. Nimmt man die Relationen (37), (38) hinzu, so gelangt man wieder zu der Ausgangsgleichung (42) zurück. Wir können dieses Resultat zusammenfassend in dem Satze aussprechen:

Verschwinden für ein System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen φ νter Ordnung alle quadratischen Invarianten mit Ausnahme der beziehungsweise in Tabelle (31) angegebenen, so bestehen gleichzeitig zwischen den quadratischen Covarianten des Formensystems φ beziehungsweise lineare Relationen von der Art der Gleichungen (35), (36) — und umgekehrt. Existieren ferner obenein $\frac{\nu+1}{2}$ bzw. $\frac{\nu}{2}$ Constante l von der Art, dass zwischen den quadratischen Covarianten die linearen Relationen der Tabelle (37) stattfinden, dass zudem für die höheren Werte von σ von $\sigma = \sigma_1$ ab die Coeffizienten der analogen Formen so beschaffen sind, dass diese sich als Ueberschiebungen einer Form über sich selbst auffassen lassen, dann und nur dann gehört das Formensystem φ einer Grundform von der Ordnung $n = \nu - \sigma_1$ im Sinne der Gleichung (28) zu. Diese Grundform ist eben mit derjenigen identisch, deren Ueberschie-

bungen jene Ausdrücke sind. Ihre irrationalen Invarianten λ sind den Constanten l sowie den nicht verschwindenden quadratischen Invarianten des Systems φ proportional.

Der erste Teil dieses Satzes stimmt, wie selbstverständlich, mit dem betreffenden Satze der Hilbert'schen Abhandlung überein. Der zweite wesentlichere Teil beweist jedoch, dass die Zugehörigkeit des Formensystems φ zur Grundform f für Formen ungerader Ordnung complizierter ist als für Formen gerader Ordnung.

Damit ist die Eingangs dieser Arbeit gestellte Aufgabe im allgemeinen Falle als erledigt zu betrachten. Es bleibt uns jetzt noch übrig, die verschiedenen möglichen Ausnahmefälle zu besprechen. Dieses soll im folgenden Paragraphen geschehen.

§ 4.

Untersuchung der verschiedenen Ausnahmefälle.

Die Herleitung der im vorigen Paragraphen besprochenen charakteristischen Eigenschaften des Formensystems φ machte von zwei wesentlichen Voraussetzungen Gebrauch. Erstens nahmen wir an, dass die $\nu+1$ Wurzeln der determinierenden Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ sämtlich von einander verschieden seien, zweitens setzten wir voraus, dass die Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$, die zur Bestimmung der Formen φ diente, nicht identisch verschwindet. Je nachdem wir nun die erste oder die zweite dieser Annahmen fallen lassen, erhalten wir zwei verschiedene Arten von Ausnahmefällen, die wir im Folgenden eingehend untersuchen wollen. Durch wechselseitige Combination beider gelangen wir zu dem denkbar allgemeinsten Ausnahmefall, auf den wir am Schluss noch kurz hinweisen werden.

Wir haben zunächst einige Vorbetrachtungen nötig. Wir betrachten die folgende allgemeine Determinante:

(43) $$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\pi)} & y^{(\pi)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}
K_{00}, & K_{01}, \ldots, & K_{0\nu}-\lambda, & y_2^{\nu}, & y_2^{(1)\nu}, \ldots, & y_2^{(\pi)\nu} \\
K_{10}, & K_{11}, \ldots, & K_{1\nu}, & -\binom{\nu}{1} y_1 y_2^{\nu-1}, & -\binom{\nu}{1} y_1^{(1)} y_2^{(1)\nu-1}, \ldots, & -\binom{\nu}{1} y_1^{\pi} y_2^{(\pi)\nu-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
K_{\nu 0}-(-1)^{\nu}\lambda, & K_{\nu 1}, \ldots, & K_{\nu\nu}, & (-1)^{\nu} y_1^{\nu}, & (-1)^{\nu} y_1^{(1)\nu}, \ldots, & (-1)^{\nu} y_1^{(\pi)\nu} \\
x_2^{\nu}, & -\binom{\nu}{1} x_1 x_2^{\nu-1}, \ldots, & (-1)^{\nu} x_1^{\nu}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_2^{(\pi)\nu}, & -\binom{\nu}{1} x_1^{(\pi)} x_2^{(\pi)\nu-1}, \ldots, & (-1)^{\nu} x_1^{(\pi)\nu}, & 0, & 0, \ldots, & 0
\end{vmatrix}$$

die durch $\pi+1$-fache Ränderung aus der Determinante $\Delta(\lambda)$ hervorgeht; $x_1, x_2; x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; \ldots; x_1^{(\pi)}, x_2^{(\pi)}; y_1, y_2; y_1^{(1)}, y_2^{(1)}; \ldots, y_1^{(\pi)}, y_2^{(\pi)}$ bedeuten darin $2(\pi+1)$ Reihen von binären Veränderlichen. Diese Determinante (43) zeichnet sich durch gewisse Eigenschaften aus, die wir zunächst abzuleiten haben.

Entwickeln wir die Determinante nach Potenzen von λ:

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\pi)} & y^{(\pi)} \end{pmatrix} = C_0\lambda^{\nu-\pi} + C_1\lambda^{\nu-\pi-1} + \cdots + C_{\nu-\pi},$$

so sind die hierbei auftretenden Coeffizienten $C_0, C_1, \ldots, C_{\nu-\pi}$ sämtlich Covarianten der Grundform f; sie sind von der Ordnung ν in jeder der $2(\pi+1)$ Variablenreihen $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(\pi)}; y, y^{(1)}, \ldots, y^{(\pi)}$ und beziehungsweise von den Graden $0, 2, 4, \ldots, 2(\nu-\pi)$ in den Coeffizienten der Form f.

Um den Beweis dieses Satzes anzudeuten, bemerken wir, dass die Determinante (43) in ähnlicher Weise zur Konstruktion gewisser irrationaler invarianter Gebilde der Grundform dient wie die früher betrachteten Determinanten $\Delta(\lambda)$ und $\Delta(x, y; \lambda)$; wir werden darauf sogleich näher hinweisen. Im Uebrigen gelten die analogen Schlüsse wie bei dem Beweise des invarianten Charakters von $\Delta(\lambda)$ und $\Delta(x, y; \lambda)$.

Weiter betrachten wir die Differentialquotienten der Determinante (43) nach λ. Wir können unsre Determinante, allein als Form der beiden Variablenpaare x_1, x_2; y_1, y_2 betrachtet, unsymbolisch und symbolisch folgendermassen darstellen:

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} \lambda = -\sum_{\iota,\varkappa}^{\iota,\varkappa} \binom{\nu}{\iota}\binom{\nu}{\varkappa} \Delta_\iota^\varkappa x_1^\iota x_2^{\nu-\iota} y_1^\varkappa y_2^{\nu-\varkappa}$$

$$= A_{x^{(1)} \dots x^{(n)}} B_{y^{(1)} \dots y^{(n)}} \alpha_x^\nu \beta_y^\nu.$$

Dabei ist, wie man leicht erkennt, $\Delta_\iota^\varkappa$ diejenige Determinante, welche durch Unterdrückung der beiden Reihen, denen $K_{\varkappa\iota}$ angehört, aus der Determinante

$$\Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} \lambda$$

entsteht, also bis auf das Vorzeichen $(-1)^{\iota+\varkappa}$ gleich der bezüglichen Unterdeterminante. Der Ausdruck

$$(44) \qquad -\sum_{\varkappa}^{\varkappa}(-1)^\varkappa \binom{\nu}{\varkappa} \Delta_{\nu-\varkappa}^\varkappa = A_{x^{(1)} \dots x^{(n)}} B_{y^{(1)} \dots y^{(n)}} (\alpha\beta)^\nu$$

stellt nunmehr eine Invariante dar, die zu den erwähnten Differentialquotienten in einer eigentümlichen Beziehung steht.

Wir setzen, um den ersten Differentialquotienten zu bilden, in der ersten, zweiten, ..., $(\nu+1)$ten Horizontalreihe der Determinante

$$\Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} \lambda$$

beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ statt λ, wodurch diese übergehen möge in Δ'. Dann ist offenbar

$$(45) \qquad \frac{\partial \Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} \lambda}{\partial\lambda} = \left[\frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_0} + \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_1} + \dots + \frac{\partial\Delta'}{\partial\lambda_\nu}\right]_{\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_\nu=\lambda}.$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} \Delta' &= (-1)^{\nu+1}\lambda_0 \Delta_\nu^0 + \cdots \\ &= (-1)^\nu \lambda_1 \Delta_{\nu-1}^1 + \cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= -\lambda_\nu \Delta_0^\nu + \cdots, \end{aligned}$$

so dass wir erhalten:

$$(46)\quad \left[\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda_0}+\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda_1}+\cdots+\frac{\partial \Delta'}{\partial \lambda_\nu}\right]_{\lambda_0=\ldots=\lambda} = (-1)^{\nu+1}\sum^{\varkappa}(-1)^{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}\Delta^{\varkappa}_{\nu-\varkappa}.$$

Die Vergleichung der Formeln (44), (45), (46) liefert die Beziehung:

$$\frac{\partial \Delta\begin{pmatrix} x^{(1)}y^{(1)} \\ \vdots\ \vdots\ \lambda \\ x^{(\pi)}y^{(\pi)}\end{pmatrix}}{\partial\lambda} = (-1)^{\nu} A_{x^{(1)}\ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(1)}\ldots y^{(\pi)}} (\alpha\beta)^{\nu}.$$

Ihre σ-malige Anwendung führt zu dem Satze:

Schreiben wir die Determinante (43), allein als Form der Variablenreihen $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(\sigma-1)}$; $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(\sigma-1)}$ betrachtet, in der symbolischen Gestalt:

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)}y^{(1)} \\ \vdots\ \vdots\ \lambda \\ x^{(\pi)}y^{(\pi)}\end{pmatrix} = A_{x^{(\sigma)}\ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(\sigma)}\ldots y^{(\pi)}} \alpha_x^{\nu}\beta_y^{\nu}\ldots \alpha_{x^{(\sigma-1)}}^{(\sigma-1)\nu}\beta_{y^{(\sigma-1)}}^{(\sigma-1)\nu},$$

so gilt für die lineare Invariante dieser Form die Beziehung:

$$(47)\quad A_{x^{(\sigma)}\ldots x^{(\pi)}} B_{y^{(\sigma)}\ldots y^{(\pi)}} (\alpha\beta)^{\nu}(\alpha^{(1)}\beta^{(1)})^{\nu}\ldots(\alpha^{(\sigma-1)}\beta^{(\sigma-1)})^{\nu} = (-1)^{\sigma\nu}\frac{\partial^{\sigma}\Delta\begin{pmatrix} x^{(\sigma)}y^{(\sigma)} \\ \vdots\ \vdots\ \lambda \\ x^{(\pi)}y^{(\pi)}\end{pmatrix}}{\partial\lambda^{\sigma}}.$$

Des Weiteren werfen wir eine Frage auf, die als eine Erweiterung unsres eigentlichen Problems anzusehen ist, nämlich die Frage nach den Formen ψ_τ, welche die Bedingungen

$$(48)\quad \begin{gathered}\{f, (f, \psi_\tau)_p\}_q - \lambda\psi_\tau + u(yx)^{\nu} + u^{(1)}(y^{(1)}x)^{\nu} + \cdots + u^{(\tau)}(y^{(\tau)}x)^{\nu} = 0, \\ \psi_\tau(x^{(1)}) = 0,\quad \psi_\tau(x^{(2)}) = 0,\quad \ldots,\quad \psi_\tau(x^{(\tau)}) = 0\end{gathered}$$

erfüllen, wobei $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\tau)}$ verfügbare Grössen bedeuten. Die Gleichungen (48) zerfallen in $\nu+\tau+1$ einzelne Gleichungen, denen wir als $(\nu+\tau+2)$te noch die folgende hinzufügen:

$$\alpha_\nu x_2^{\nu} + \binom{\nu}{1}\alpha_{\nu-1}x_2^{\nu-1}x_1 + \cdots + \alpha_0 x_1^{\nu} - \psi_\tau = 0.$$

Wir haben somit jetzt $\nu+\tau+2$ Gleichungen für die $\nu+\tau+3$

linear und homogen auftretenden Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(\tau)}, \psi_\tau$, deren Bestimmung in bekannter Weise, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, das Resultat liefert:

$$\psi_\tau = \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)} & y^{(\tau)} \end{pmatrix}, \qquad u_\tau = \Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)} & y^{(\tau)} \end{pmatrix}$$

$$u_\tau^{(1)} = \Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y \\ x^{(2)} & y^{(2)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)} & y^{(\tau)} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad u_\tau^{(\tau)} = \Delta\begin{pmatrix} x^{(1)} & y \\ x^{(2)} & y^{(1)} & \lambda \\ \vdots & \vdots & \\ x^{(\tau)} & y^{(\tau-1)} \end{pmatrix}.$$

Nach Einsetzung dieser Werte muss die Gleichung (48) identisch erfüllt sein; ihre Differentiation nach λ ist darum gestattet, und wir erhalten:

$$(49)\quad \left\{f, \left(f, \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^\sigma}\right)_p\right\}_q - \lambda \frac{\partial^\sigma \psi_\tau}{\partial \lambda^\sigma} - \sigma \frac{\partial^{\sigma-1} \psi_\tau}{\partial \lambda^{\sigma-1}} + \frac{\partial^\sigma u_\tau}{\partial \lambda^\sigma}(yx)^\nu + \cdots + \frac{\partial^\sigma u_\tau^{(\tau)}}{\partial \lambda^\sigma}(y^{(\tau)}x)^\nu = 0.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen wenden wir uns zur Besprechung der Ausartungen des Systems der irrationalen Covarianten φ. Erstens behandeln wir den Fall, dass die determinierende Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine mehrfache Wurzel besitze. Es sei $\lambda = \lambda^{(0)}$ eine $\varrho+1$-malige Wurzel dieser Gleichung. Dagegen soll die Determinante $\Delta(x, y; \lambda)$ für $\lambda = \lambda^{(0)}$ nicht identisch verschwinden. Unser Ausnahmefall ist dann durch folgende Kriterien charakterisiert:

$$(50)\quad \begin{gathered} \Delta(\lambda^{(0)}) = 0, \quad \frac{\partial \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^\varrho \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} = 0, \\ \frac{\partial^{\varrho+1} \Delta(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho+1}} \neq 0; \quad \Delta(x, y; \lambda^{(0)}) \neq 0. \end{gathered}$$

Um diesen Ausnahmefall zu untersuchen, benutzen wir die Formel (49) für $\tau = 0$, $\sigma = 0, 1, \ldots, \varrho$ und $\lambda = \lambda^{(0)}$; sie geht unter Berücksichtigung der Kriterien (50) über in

$$\begin{array}{l|l} \{f, (f, \psi_0)_p\}_q = \lambda^{(0)} \psi_0 & \psi_0 = \Delta(x, y; \lambda^{(0)}) \\ \left\{f, \left(f, \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}}\right)_p\right\}_q = \lambda^{(0)} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} + \psi_0 & \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} = \frac{\partial \Delta(x, y; \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} \\ \left\{f, \left(f, \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}}\right)_p\right\}_q = \lambda^{(0)} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}} + 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^{(0)}} & \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \lambda^{(0)2}} = \frac{\partial^2 \Delta(x, y; \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \left\{f, \left(f, \frac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}}\right)_p\right\}_q = \lambda^{(0)} \frac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} + \varrho \frac{\partial^{\varrho-1} \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho-1}} & \frac{\partial^\varrho \psi_0}{\partial \lambda^{(0)\varrho}} = \frac{\partial^\varrho \Delta(x, y; \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)\varrho}}. \end{array}$$

Die erste der hier eingeführten $\varrho+1$ Formen von x und y muss im Wesentlichen mit unsrer früheren Form $\varphi^{(0)}$ identisch sein; es ist daher der Ansatz berechtigt:

$$\psi_0 = \psi^{(0)}(x)\chi^{(0)}(y)$$

wo $\psi^{(0)} = \varphi^{(0)}$ der Uebereinstimmung der Bezeichnungsweisen halber gesetzt ist. Für die übrigen Formen $\frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda^{(0)}}, \ldots$ bekommen wir damit ebenfalls gewisse Ansätze, so dass wir im Ganzen das System von folgenden $\varrho+1$ Gleichungen haben:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \psi^{(0)}(x)\chi^{(0)}(y)\\
\frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda^{(0)}} &= \psi^{(1)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(0)}(x)\chi^{(1)}(y)\\
\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\lambda^{(0)2}} &= \psi^{(2)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\psi^{(0)}(x)\chi^{(2)}(y)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{1}{\varrho!}\frac{\partial^\varrho\psi_0}{\partial\lambda^{(0)\varrho}} &= \psi^{(\varrho)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(\varrho-1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\cdots+\psi^{(0)}(x)\chi^{(\varrho)}(y).
\end{aligned}$$

Damit haben wir ein System von Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ eingeführt, für welches die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\{f,(f,\psi^{(0)})_p\}_q &= \lambda^{(0)}\psi^{(0)}\\
\{f,(f,\psi^{(1)})_p\}_q &= \lambda^{(0)}\psi^{(1)}+\psi^{(0)}\\
\{f,(f,\psi^{(2)})_p\}_q &= \lambda^{(0)}\psi^{(2)}+\psi^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\{f,(f,\psi^{(\varrho)})_p\}_q &= \lambda^{(0)}\psi^{(\varrho)}+\psi^{(\varrho-1)}.
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y,\lambda^{(0)}) &= \psi^{(0)}(x)\chi^{(0)}(y)\\
\frac{\partial\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} &= \psi^{(1)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(0)}(x)\chi^{(1)}(y)\\
\frac{1}{2!}\frac{\partial^2\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)2}} &= \psi^{(2)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\psi^{(0)}(x)\chi^{(2)}(y)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{1}{\varrho!}\frac{\partial^\varrho\Delta(x,y,\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)\varrho}} &= \psi^{(\varrho)}(x)\chi^{(0)}(y)+\psi^{(\varrho-1)}(x)\chi^{(1)}(y)+\cdots+\psi^{(0)}(x)\chi^{(\varrho)}(y).
\end{aligned} \tag{52}$$

Nennen wir eine Formenreihe, für welche ein derartiges Gleichungssystem gilt, die ϱ-fache Fortsetzung der Ausgangsform, so haben wir den Satz gewonnen:

Die den Kriterien (50) entsprechende Ausartung

bedingt für die Form $\varphi^{(0)}$ die Existenz einer ϱ-fachen Fortsetzung, deren Repräsentanten $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ durch die Gleichungen (52) definiert sind — und umgekehrt.

Dass nämlich auch die Umkehrung gilt, beweist man durch einfache Umkehrung unsrer vorhergehenden Schlüsse. Wir bemerken noch, dass die gleichzeitig eingeführten Formen χ mit den Formen ψ wesentlich äquivalent erscheinen.

Das System der Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$ ist nun im stande, die Formen $\varphi^{(0)} = \psi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\varrho)}$, von denen die ϱ letzten hier in Wegfall kommen, vollständig zu ersetzen. Wir wollen den Beweis dieser Thatsache hier nicht vollständig ausführen, sondern nur Folgendes bemerken. Für die Ueberlegungen des § 3 waren ausser den Formeln (26), (27) vor Allem zwei Eigenschaften des Formensystems φ wesentlich: erstens die lineare Unabhängigkeit der Formen φ und zweitens das Verschwinden gewisser quadratischer Invarianten dieser Formen. Dass diese beiden Eigenschaften auch für unser neues System von Formen $\psi^{(0)} = \varphi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}, \varphi^{(\varrho+1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ bestehen, wollen wir hier noch näher begründen.

Die Formen $\psi^{(0)} = \varphi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}, \varphi^{(\varrho+1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ sind von einander linear unabhängig.

Wir nehmen an, es bestände zwischen ihnen eine lineare Relation mit constanten Coeffizienten, etwa die folgende:

$$c^{(0)}\psi^{(0)} + c^{(1)}\psi^{(1)} + \cdots + c^{(\varrho)}\psi^{(\varrho)} + c^{(\varrho+1)}\varphi^{(\varrho+1)} + \cdots + c^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} = 0.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen (51), (28), so finden wir in analoger Weise wie auf pag. 21, dass auch die Relation bestehen muss:

$$(c^{(0)}\lambda^{(0)} + c^{(1)})\psi^{(0)} + (c^{(1)}\lambda^{(0)} + c^{(2)})\psi^{(1)} + \cdots + (c^{(\varrho-1)}\lambda^{(0)} + c^{(\varrho)})\psi^{(\varrho-1)}$$
$$+ c^{(\varrho)}\lambda^{(\varrho)}\psi^{(\varrho)} + c^{(\varrho+1)}\lambda^{(\varrho+1)}\varphi^{(\varrho+1)} + \cdots + c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)}\varphi^{(\nu)} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich weiter:

$$(c^{(0)}\lambda^{(0)2} + 2c^{(1)}\lambda^{(0)} + c^{(2)})\psi^{(0)} + (c^{(1)}\lambda^{(0)2} + 2c^{(2)}\lambda^{(0)} + c^{(3)})\psi^{(1)} + \cdots$$
$$+ c^{(\varrho)}\lambda^{(0)2}\psi^{(\varrho)} + c^{(\varrho+1)}\lambda^{(\varrho+1)2}\varphi^{(\varrho+1)} + \cdots + c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)2}\varphi^{(\nu)} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(c^{(0)}\lambda^{(0)\varrho} + \binom{\varrho}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\varrho-1} + \cdots + c^{(\varrho)}\right)\psi^{(0)} + \cdots + c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\varrho}\psi^{(\varrho)}$$
$$+ c^{(\varrho+1)}\lambda^{(\varrho+1)\varrho}\varphi^{(\varrho+1)} + \cdots + c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)\varrho}\varphi^{(\nu)} = 0$$

$$\left(c^{(0)}\lambda^{(0)\varrho+1}+\binom{\varrho+1}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\varrho}+\cdots+\binom{\varrho+1}{\varrho}c^{(\varrho)}\lambda^{(0)}\right)\psi^{(0)}+\cdots+c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\varrho+1}\psi^{(\varrho)}$$
$$+c^{(\varrho+1)}\lambda^{(\varrho+1)\varrho+1}\varphi^{(\varrho+1)}+\cdots+c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)\varrho+1}\varphi^{(\nu)}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(c^{(0)}\lambda^{(0)\nu}+\binom{\nu}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\nu-1}+\cdots+\binom{\nu}{\varrho}c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\nu-\varrho}\right)\psi^{(0)}+\cdots+c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\nu}\psi^{(\varrho)}$$
$$+c^{(\varrho+1)}\lambda^{(\varrho+1)\nu}\varphi^{(\varrho+1)}+\cdots+c^{(\nu)}\lambda^{(r)\nu}\varphi^{(\nu)}=0.$$

Damit haben wir $\nu+1$ Gleichungen, aus denen wir durch Elimination der $\nu+1$ Grössen $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$, …, $\varphi^{(\nu)}$ erhalten:

$$0=\begin{vmatrix} c^{(0)}, & \cdots, c^{(\varrho)}, & \cdots, c^{(\nu)} \\ c^{(0)}\lambda^{(0)}+c^{(1)}, & \cdots, c^{(\varrho)}\lambda^{(0)}, & \cdots, c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c^{(0)}\lambda^{(0)\varrho}+\binom{\varrho}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\varrho-1}+\cdots+c^{(\varrho)}, & \cdots, c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\varrho}, & \cdots, c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)\varrho} \\ c^{(0)}\lambda^{(0)\varrho+1}+\binom{\varrho+1}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\varrho}+\cdots+c^{(\varrho)}\binom{\varrho+1}{\varrho}\lambda^{(0)}, & \cdots, c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\varrho+1}, & \cdots, c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)\varrho+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c^{(0)}\lambda^{(0)\nu}+\binom{\nu}{1}c^{(1)}\lambda^{(0)\nu-1}+\cdots+\binom{\nu}{\varrho}c^{(\varrho)}\lambda^{(0)\nu-\varrho}, & \cdots, c^{(\varrho)}\lambda^{(\nu)\nu}, & \cdots, c^{(\nu)}\lambda^{(\nu)\nu} \end{vmatrix}.$$

Seien für einen Augenblick in einer festen Vertikalreihe der hier auftretenden Determinante die einzelnen Elemente v_0, v_1, …, v_ν, so addieren wir zu v_1 die Grösse $-\lambda^{(0)}v_0$, zu v_2 ebenso $-2\lambda^{(0)}v_1+\lambda^{(0)2}v_0$, zu v_3 ebenso $-3\lambda^{(0)}v_2+3\lambda^{(0)2}v_1-\lambda^{(0)3}v_0$ usf.; dadurch erhalten wir:

$$0=\begin{vmatrix} c^{(0)}, c^{(1)}, \ldots, c^{(\varrho)}, c^{(\varrho+1)}, & \cdots, c^{(\nu)} \\ c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, 0, c^{(\varrho+1)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(\varrho)}), & \cdots, c^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)}) \\ c^{(2)}, c^{(3)}, \ldots, 0, c^{(\varrho+1)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^2, & \cdots, c^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c^{(\varrho)}, 0, \ldots, 0, c^{(\varrho+1)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^\varrho, & \cdots, c^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^\varrho \\ 0, 0, \ldots, 0, c^{(\varrho+1)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}, & \cdots, c^{(0}(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \ldots, 0, c^{(\varrho+1)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^\nu, & \cdots, c^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^\nu \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist jetzt leicht auszuwerten; wir bekommen:

$$0=(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}(\lambda^{(\varrho+2)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}\ldots(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}c^{(\varrho)\varrho+1}c^{(\varrho+1)}\ldots c^{(\nu)}\cdot$$
$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, 1 \\ \lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)}, & \lambda^{(\varrho+2)}-\lambda^{(0)}, & \cdots, \lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ (\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^{\nu-\varrho-1}, & (\lambda^{\varrho+2}-\lambda^{(0)})^{\nu-\varrho-1}, & \cdots, (\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^{\nu-\varrho-1} \end{vmatrix}$$
$$=c^{(\varrho)\varrho+1}c^{(\varrho+1)}\ldots c^{(\nu)}(\lambda^{(\varrho+1)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}\ldots(\lambda^{(\nu)}-\lambda^{(0)})^{\varrho+1}\prod_{\varrho+1,\ldots,\nu}^{\mu,\,\varkappa}(\lambda^{(\mu)}-\lambda^{(\varkappa)}).$$

Da wir voraussetzen, dass die Wurzeln $\lambda^{(0)}, \lambda^{(\varrho+1)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}$ von einander verschieden sind, so müsste hiernach eine der Grössen $c^{(\varrho)}, c^{(\varrho+1)}, \ldots, c^{(\nu)}$ gleich Null sein. Sei etwa $c^{(\varrho)} = 0$. Dann kann man durch ganz analoge Schlüsse nachweisen, dass auch $c^{(\varrho-1)}, c^{(\varrho-2)}, \ldots, c^{(1)}$ gleich Null sein müssen. Es bestände also eine lineare Relation zwischen den Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(\varrho+1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$, welche lauter verschiedenen Wurzeln λ zugehören, was nach § 3 nicht möglich ist. — Sei andrerseits eins der andren c, etwa $c^{(\nu)}$, gleich Null, so gelangen wir wiederum durch analoge Schlüsse dazu, dass auch $c^{(\nu-1)}, \ldots, c^{(\varrho+1)}$ verschwinden müssen. Es bestände sonach eine lineare Relation zwischen den Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}$. Die Bedingung hierfür ergiebt sich aber auf demselben Wege wie vorher zu

$$0 = \begin{vmatrix} c^{(0)} & c^{(1)} & \ldots & c^{(\varrho)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c^{(\varrho)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \pm c^{(\varrho)\varrho+1},$$

und damit würden wieder alle übrigen c verschwinden; eine lineare Relation kann also zwischen den Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(\varrho)}, \varphi^{(\varrho+1)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ nicht bestehen.

Zweitens haben wir zu untersuchen, ob einige der quadratischen Invarianten der Formen $\psi^{(0)}, \ldots, \varphi^{(\nu)}$ verschwinden, beziehungsweise welche von ihnen verschwinden. Wir haben drei verschiedene Gruppen dieser Invarianten zu unterscheiden:

1) die νte Ueberschiebung einer Form ψ über die zu einer einfachen Wurzel gehörige Form φ;

2) die νte Ueberschiebung einer Form ψ über eine andre Form ψ oder über sich selbst;

3) die νte Ueberschiebung einer Form ψ über eine der zu einer andren mehrfachen Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$ zugehörigen Formen χ.

Um diese drei Fälle zu behandeln, gehen wir von der Formel (29) aus. Da diese besteht, welches auch immer die Formen $\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)}$ seien, so schliessen wir, dass stets die Relation gilt:

$$(53) \qquad \{[f, (f, \varphi^{(\varkappa)})_p]_q, \varphi^{(\mu)}\}_\nu = (-1)^{\nu+1}\{[f, (f, \varphi^{(\mu)})_p]_q, \varphi^{(\varkappa)}\}_\nu,$$

wobei über die Beschaffenheit der Formen $\varphi^{(\mu)}, \varphi^{(\varkappa)}$ nichts vorausgesetzt ist. Ist nun $\varphi^{(\varkappa)} = \psi^{(\varkappa)}$ und $\varphi^{(\mu)}$ eine zu einer einfachen Wurzel $\lambda^{(\mu)}$ zugehörige Form, so folgt für $\varkappa = 0$:

$$(\lambda^{(0)} + \lambda^{(\mu)})(\varphi^{(\mu)}, \psi^{(0)})_\nu = 0,$$

also auch

$$(\varphi^{(\mu)}, \psi^{(0)})_\nu = 0.$$

Die Wurzel $\lambda^{(\mu)} = -\lambda^{(0)}$ ist nämlich jedenfalls keine einfache Wurzel, und der Fall $\lambda^{(\mu)} = \lambda^{(0)} = 0$ gehört nicht hierher. Für $\varkappa = 1$ wird:

$$\lambda^{(0)}(\psi^{(1)}, \varphi^{(\mu)})_\nu + (\psi^{(0)}, \varphi^{(\mu+1)})_\nu = (-1)^{\nu+1}\lambda^{(\mu)}(\varphi^{(\mu)}, \psi^{(1)})_\nu,$$

also unter Benutzung der eben abgeleiteten Formel:

$$(\varphi^{(\mu)}, \psi^{(1)})_\nu = 0.$$

So können wir fortfahren und erhalten den Satz:

Die νten Ueberschiebungen einer Form ψ über die zu einer einfachen Wurzel zugehörige Form φ verschwinden sämtlich.

Was den zweiten Fall anlangt, so folgt für die νte Ueberschiebung zweier Formen ψ über einander nach (53):

$$2\lambda^{(0)}(\psi^{(\varkappa)}, \psi^{(\mu)})_\nu = (-1)^{\nu+1}(\psi^{(\mu-1)}, \psi^{(\varkappa)})_\nu - (\psi^{(\varkappa-1)}, \psi^{(\mu)})_\nu. \tag{54}$$

Ist eine der beiden Zahlen $\varkappa$, μ gleich Null, so fällt auf der rechten Seite ein Term, sind beide $= 0$, so fallen beide Terme fort.

Sei zunächst $\lambda^{(0)} \neq 0$. Die Formel (54) zeigt dann, indem man $\varkappa$, μ immer grössere Werte annehmen lässt, von $\varkappa$, $\mu = 0, 0$; $0, 1$; $1, 1$ aus beginnend, dass sämtliche νte Ueberschiebungen verschwinden müssen.

Es sei andrerseits $\lambda^{(0)} = 0$— ein Fall, der besonderes Interesse beansprucht, weil gerade er häufig als Ausnahmefall bei ganz allgemein gehaltenen Coeffizienten der Grundform f auftritt. Aus (54) erhalten wir:

$$(\psi^{(\mu-1)}, \psi^{(\varkappa)})_\nu = (-1)^{\nu+1}(\psi^{(\varkappa-1)}, \psi^{(\mu)})_\nu. \tag{55}$$

Die Anwendung dieser Formel für $\varkappa = 0$; $\mu = 1, 2, \ldots, \varrho$ zeigt das Verschwinden aller Invarianten $(\psi^{(\mu)}, \psi^{(\varkappa)})_\nu$ für $\varkappa = 0$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \varrho-1$; ebenso ihre Anwendung für $\varkappa = 1$; $\mu = 1, 2, \ldots, \varrho-1$ das Verschwinden aller Invarianten für $\varkappa = 1$; $\mu = 0, 1, \ldots, \varrho-2$ usf. Für die übrig bleibenden Wertepaare von $\varkappa$, μ können wir nichts weiter schliessen; es besteht aber für sie die Relation (55). Wir gewinnen somit das Resultat:

Die νten Ueberschiebungen einer Form ψ über sich selbst oder eine andre Form ψ verschwinden, sämtlich, wenn die mehrfache Wurzel $\lambda^{(0)} \neq 0$ ist. Ist aber $\lambda^{(0)} = 0$, so verschwindet $(\psi^{(\varkappa)}, \psi^{(\mu)})_\nu$ für folgende

Wertepaare von $\varkappa$, μ

$$\begin{aligned} &\varkappa = 0; \quad \mu = 0, 1, \ldots, \varrho-1 \\ &\varkappa = 1; \quad \mu = 0, 1, \ldots, \varrho-2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varkappa = \varrho-1; \ \mu = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Für die übrigen νten Ueberschiebungen besteht die Relation (55).

Was endlich den dritten Fall betrifft, so giebt uns die Anwendung der Gleichung (53) auf zwei Formen, von denen die eine $\psi^{(\varkappa)}$ zur mehrfachen Wurzel $\lambda = \lambda^{(0)}$, die andre $\chi^{(\mu)}$ zur mehrfachen Wurzel $\lambda = \lambda^{(\tau)}$ gehört, die Beziehung:

$$(\lambda^{(0)}+\lambda^{(\tau)})(\psi^{(\varkappa)}, \chi^{(\mu)})_\nu = (-1)^{\nu+1}(\chi^{(\mu-1)}, \psi^{(\varkappa)})_\nu - (\psi^{(\varkappa-1)}, \chi^{(\mu)})_\nu.$$

Wir gelangen in derselben Weise wie beim zweiten Falle zu dem Satze:

Die νten Ueberschiebungen einer zur mehrfachen Wurzel $\lambda^{(0)}$ gehörigen Form ψ über eine zur ebenfalls mehrfachen Wurzel $\lambda^{(\tau)}$ gehörige Form χ verschwinden sämtlich, wenn $\lambda^{(\tau)} \neq -\lambda^{(0)}$ ist. Ist aber $\lambda^{(\tau)} = -\lambda^{(0)}$, so verschwindet $(\psi^{(\varkappa)}, \chi^{(\mu)})_\nu$ für die folgenden Wertepaare von $\varkappa$, μ:

$$\begin{aligned} &\varkappa = 0; \quad \mu = 0, 1, \ldots, \varrho-1 \\ &\varkappa = 1; \quad \mu = 0, 1, \ldots, \varrho-2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varkappa = \varrho-1; \ \mu = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Für die übrigen νten Ueberschiebungen besteht die Relation:

$$(\chi^{(\mu-1)}, \psi^{(\varkappa)})_\nu = (-1)^{\nu+1}(\psi^{(\varkappa-1)}, \chi^{(\mu)})_\nu \tag{58}$$

Dass in Wirklichkeit auch nicht alle quadratischen Invarianten des Formensystems ψ, φ verschwinden dürfen, ist wegen der linearen Unabhängigkeit dieser Formen notwendig (vgl. pag. 24).

Hiermit sind die Grundlagen für die weitere Untersuchung des Formensystems ψ, φ gegeben; es treten dabei an Stelle der Gleichungen (26), (27) für $\mu = 0, 1, \ldots, \varrho$ die Gleichungen (52). Wir wollen unsre früheren Schlüsse hier nicht wiederholen, sondern nur kurz auf das Resultat hinweisen. Wir gelangen, wie im allgemeinen Falle, zu linearen Relationen zwischen den quadratischen Covarianten des Formensystems ψ, φ, welche einerseits

dazu dienen können, das Formensystem als eines von der betreffenden Ausartung zu charakterisieren, andrerseits die Darstellung gewisser entsprechend ausgearteter Covarianten der Grundform f gestatten.

Wir wenden uns zur Behandlung des zweiten Ausnahmefalles, der zunächst durch das identische Verschwinden der Covariantenbildung $\Delta(x, y, \lambda^{(0)})$ charakterisiert war. Wir behandeln jedoch sogleich einen allgemeineren Ausnahmefall, indem wir annehmen, dass ausser der genannten auch noch weitere der geränderten Determinanten (43) identisch verschwinden; etwa

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}),\ \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{(0)} \\ x^{(r-1)} & y^{(r-1)} & \end{pmatrix}.$$

Alsdann müssen auch die Invarianten dieser Formen verschwinden und somit zufolge (47) auch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}} = 0,\quad \frac{\partial^2\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)2}} = 0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial^r\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)r}} = 0$$

sein. Setzen wir fest, dass eine Ausartung höherer Art augenblicklich nicht eintreten soll, so werden wir die augenblickliche Ausartung durch die Kriterien

$$\Delta(x, y, \lambda^{(0)}) = 0,\quad \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \lambda^{(0)} \end{pmatrix} = 0,\quad \ldots,\quad \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{(0)} \\ x^{(r-1)} & y^{(r-1)} & \end{pmatrix} = 0$$

(59)

$$\frac{\partial^{r+1}\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)r+1}} \neq 0$$

charakterisieren können. Uebrigens zieht dabei das Verschwinden der letzten Determinante

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} & \\ \vdots & \vdots & \lambda^{(0)} \\ x^{(r-1)} & y^{(r-1)} & \end{pmatrix}$$

das Verschwinden aller vorhergehenden nach sich, wie man leicht beweist.

Um nun diesen Ausnahmefall näher zu behandeln, wenden wir uns zur Betrachtung der durch das Gleichungssystem (48) repräsentierten $\nu+\tau+1$ linearen Gleichungen zurück. Wir setzen $\tau = r$ und erhalten dann ein System von $\nu+r+1$ homogenen

Gleichungen mit den $\nu+r+2$ Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(r)}$, dessen Determinante sicher von Null verschieden ist. Wäre sie nämlich $= 0$, so würde nach (47) auch das Verschwinden von $\frac{\partial^{r+1}\Delta(\lambda^{(0)})}{\partial\lambda^{(0)}}$ folgen, was nach (59) ausgeschlossen ist. Die Lösungen des Gleichungssystems sind somit eindeutig bestimmt; es ergiebt sich zunächst

$$u = 0, \quad u^{(1)} = 0, \quad \ldots, \quad u^{(r)} = 0.$$

Unser Gleichungssystem geht somit über in das folgende:

$$[f, (f, \psi_r)_p]_q = \lambda^{(0)}\psi_r$$
$$\psi_r(x^{(1)}) = 0, \quad \psi_r(x^{(2)}) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_r(x^{(r)}) = 0.$$

Wir erkennen daraus, dass wir für ψ_r den Ansatz machen können:

$$\psi_r = \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(r)} & y^{(r)} \end{pmatrix} \lambda^{(0)} = \Psi(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) \cdot X(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}).$$

Nun verschwinden aber in der Determinante $\Delta(\lambda^{(0)})$ sämtliche Unterdeterminanten r ter Ordnung, weil

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(r-1)} & y^{(r-1)} \end{pmatrix} \lambda^{(0)} = 0$$

ist. Wir erkennen somit, dass, so lange der Form ψ_r noch nicht die Bedingungen $\psi_r(x^{(1)}) = 0, \ldots, \psi_r(x^{(r)}) = 0$ auferlegt sind, also lediglich die Gleichungen (19) zu der Bestimmung ihrer Coeffizienten vorliegen, $r+1$ dieser Gleichungen (19) immer eine Folge der $\nu-r$ übrigen sind. Wir erhalten dann eine r-fach unendliche Mannigfaltigkeit von Formen, so dass wir schreiben können:

$$\psi_r = \{\psi^{(0)}(x)\psi^{(0)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}) + \psi^{(1)}(x)\psi^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}) + \cdots + \psi^{(r)}(x)\psi^{(r)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)})\}\chi(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}).$$

Da

$$\Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(r)} & y^{(r)} \end{pmatrix} \lambda^{(0)}$$

für $x = x^{(1)}$, ebenso für $x = x^{(2)}, \ldots, x = x^{(r)}$ gleich Null wird, so

ergiebt sich weiter:

$$\begin{aligned}
0 &= \psi^{(0)}(x^{(1)})\psi^{(0)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \psi^{(1)}(x^{(1)})\psi^{(1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \cdots \\
&\qquad + \psi^{(r)}(x^{(1)})\psi^{(r)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) \\
0 &= \psi^{(0)}(x^{(2)})\psi^{(0)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \psi^{(1)}(x^{(2)})\psi^{(1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) + \cdots \\
&\qquad + \psi^{(r)}(x^{(2)})\psi^{(r)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}) \\
&\ldots\ldots\ldots

Wir haben somit das Ergebnis:

Die den Kriterien (59) entsprechende Ausartung bewirkt, dass der Wurzel $\lambda^{(0)}$ jede Form einer r-fach unendlichen linearen Formenmannigfaltigkeit zugehört — und umgekehrt.

Diese Formenschar ist durch (60) bestimmt, wenn man darin die Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$ als variable Parameter ansieht. Die Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$ ersetzen die Formen $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ vollständig. Die Formen $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}, \varphi^{(r+1)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ sind von einander linear unabhängig. Ihre νten Ueberschiebungen sind teils 0, teils durch die Wurzeln λ darstellbar.

Schreiben wir ferner das obige Determinantenprodukt (60), als Form der $2(r+1)$ Variablenreihen $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$; $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$ betrachtet, symbolisch in der Gestalt:

$$\alpha_x^\nu \beta_y^\nu \alpha_{x^{(1)}}^{(1)\nu} \beta_{y^{(1)}}^{(1)\nu} \ldots \alpha_{x^{(r)}}^{(r)\nu} \beta_{y^{(r)}}^{(r)\nu},$$

so erhalten wir mit Hülfe der Relation (47) leicht die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)2}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-1} \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)r-1}} = 0,$$

(61)

$$\frac{\partial^r \Delta(x, y, \lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)r}} = \alpha_x^\nu \beta_y^\nu (\alpha^{(1)} \beta^{(1)})^\nu \ldots (\alpha^{(r)} \beta^{(r)})^\nu.$$

Die Gleichungen (61) treten an Stelle der Gleichungen (26), (27) für $\mu = 1, 2, \ldots, r$. Die dem allgemeinen Falle analoge Untersuchung führt alsdann zu linearen Relationen zwischen den quadratischen Covarianten des Formensystems ψ, φ, welchen die schon oft besprochene Bedeutung zukommt.

Durch Verbindung der beiden bisher besprochenen Ausnahmefälle gelangen wir endlich zum denkbar allgemeinsten Ausnahmefall, über den wir nur noch wenige Bemerkungen machen wollen. Setzen wir zur Abkürzung

$$A_\pi = \Delta\begin{pmatrix} x & y \\ x^{(1)} & y^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{(\pi-1)} & y^{(\pi-1)} \end{pmatrix} \lambda^{(0)}, \quad A_\pi^\varkappa = \frac{\partial^\varkappa A_\pi}{\partial \lambda^{(0)\varkappa}},$$

so ist, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, die allgemeinste Aus-

artung durch die Kriterien bestimmt[1]):

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & & & A_{r+1} \neq 0 \\
A_r = 0, & A_r^1 = 0, & \ldots, & A_r^{\varrho} = 0, & & A_r^{\varrho+1} \neq 0 \\
A_{r-1} = 0, & A_{r-1}^1 = 0, & \ldots, & A_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+1} = 0, & & A_{r-1}^{\varrho+\varrho_1+2} \neq 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A = 0, & A^1 = 0, & \ldots, & A^{\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r} = 0, & & A^{\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r+1} \neq 0.
\end{array} \tag{62}
$$

Aus dem Verschwinden von A_r, A_r^1, ..., A_r^{ϱ} folgt nämlich von selbst das Verschwinden von A_{r-1}, A_{r-1}^1, ..., $A_{r-1}^{\varrho+1}$, und eine höhere Ausartung wird erst dadurch bedingt, dass auch noch $A_{r-1}^{\varrho+2}$, ... verschwinden; analog schliesst man weiter.

Die allgemeinste Ausartung bedingt für die Form $\varphi^{(0)}$ eine Fortsetzung höherer Art — und umgekehrt.

Man beweist dieses durch Anwendung der Formel (49), deren Anwendung für

$$
\begin{array}{l}
\tau = r;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \varrho \\
\tau = r-1;\ \sigma = \varrho+1, \varrho+2, \ldots, \varrho+\varrho_1+1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\tau = 0;\ \sigma = \varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_{r-1}+r, \ldots, \varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r
\end{array}
$$

das System von Gleichungen:

$$
\left\{f, \left(f, \frac{\partial^{\sigma}\psi_{\tau}}{\partial\lambda^{(0)\,\sigma}}\right)_p\right\}_q = \lambda^{(0)}\frac{\partial^{\sigma}\psi_{\tau}}{\partial\lambda^{(0)\,\sigma}} + \sigma\frac{\partial^{\sigma-1}\psi_{\tau}}{\partial\lambda^{(0)\,\sigma-1}} \tag{63}
$$

liefert.

Auch in diesem Falle lässt sich ein System von Formen $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$, ..., $\psi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+\varrho)}$, $\varphi^{(\varrho+\varrho_1+\cdots+\varrho_r+r+1)}$, ..., $\varphi^{(\nu)}$ konstruieren, welches entsprechende Eigenschaften besitzt, wie die Formen φ des allgemeinen Falles. Wir können an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen. —

Damit dürfte die Aufgabe, die wir uns am Beginne dieser Arbeit gestellt haben, als erledigt zu betrachten sein. Wir haben gefunden, dass es in jedem Falle möglich ist, ein System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen νter Ordnung zu konstruieren, das zu einer Grundform ungerader Ordnung in einfacher Beziehung steht. Damit beherrschen wir aber auch die Beziehungen, die eine beliebige Form νter Ordnung zur Grundform besitzt.

---

1) Vgl. Hilbert, l. c., pag. 426 ff.

Der Zweck dieser Arbeit, die Resultate der Abhandlung von Herrn Prof. Hilbert, die sich nur auf Formen gerader Ordnung bezog, auch auf Formen ungerader Ordnung auszudehnen, dürfte damit erreicht sein.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Hilbert, der mich während meiner Studienzeit stets mit förderndem Rat unterstützt hat und dem ich auch die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Lebenslauf.

Ich, Sophus Marxsen, am 5. April 1877 zu Pinneberg (Holstein) geboren, besuchte das Gymnasium zu Altona, welches ich Michaelis 1894 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Ich widmete mich alsdann dem Studium der Mathematik, und zwar studierte ich von Mich. 1894 bis Mich. 1895, von Mich. 1896 bis Ostern 1898 und von Ostern 1899 ab in Göttingen, von Mich. 1895 bis Mich. 1896 in München. Von Ostern 1898 bis Ostern 1899 war ich als Hauslehrer auf einem Gute in Holstein thätig. Das Staatsexamen bestand ich vor der Kgl. Wissenschaftlichen Prüfungskommission zu Göttingen am 24./25. November 1899. Seit dem 1. April 1900 diene ich als Einjährig-Freiwilliger beim 2. Hessischen Infanterie-Regiment No. 82 zu Göttingen. Ich besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten:

in Göttingen: Baumann, Hilbert, Klein, G. E. Müller, Riecke, Ritter (†), Schoenflies, Schur, Voigt, Wagner, H. Weber;

in München: Föppl, Lindemann, v. Miller, Pringsheim, Seeliger, Sohncke.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.